Opgaver til kursusgang 18: Vektorer i planen 1

1. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

   Udregn

$$3\vec{u}, \qquad -\vec{v}, \qquad \vec{u}+\vec{v}, \qquad \vec{u}-\vec{v}, \qquad \|\vec{u}\|, \qquad \|\vec{v}\|, \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}, \qquad \hat{\vec{u}}\cdot(2\vec{v}).$$

2. Bestem arealet af det parallelogram som udspændes af de to vektorer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 5-t \\ 2 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 4 \\ t+1 \end{bmatrix},$$

   hvor $t \in \mathbf{R}$. For hvilke t gælder at

   (a) $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er vinkelrette?

   (b) $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle?

4. Udregn vinklen mellem vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

5. Bestem $\vec{u}$ så at

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix} + 2\vec{u}$$

6. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$$

   Udregn

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}), \qquad 3\vec{u}+\vec{v}-2\vec{w}, \qquad \det(\vec{u}-\vec{w},\vec{v}), \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}, \qquad \frac{\vec{w}}{\|\vec{u}-\vec{v}\|}.$$

7. Bestem arealet af det parallelogram som udspændes af de to vektorer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} -12 \\ -21 \end{bmatrix}.$$

8. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 6t \\ t^2 - 4 \end{bmatrix}.$$

Bestem t så at

(a) $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

(b) $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er vinkelrette.

EKSTRAOPGAVER:

9. Bestem alle vektorer som står vinkelret på

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

10. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

og vis med en eksplicit udregning at $\vec{u} \cdot \hat{\vec{u}} = 0$.

11. Vis at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}, \qquad \det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u}), \qquad \|k\vec{u}\| = |k|\|\vec{u}\|,$$

for alle vektorer $\vec{u}, \vec{v}$ og $k \in \mathbf{R}$.

12. Lad $\vec{v} \neq 0$ og vis at $\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ er en enhedsvektor.

13. Lad $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være vektorer i $\mathbf{R}^2$ og vis at

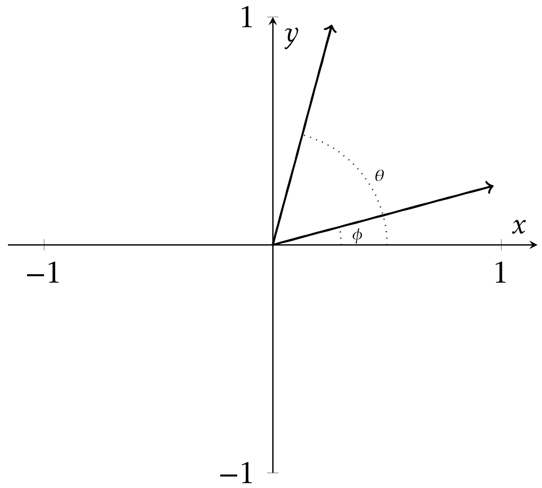
$$(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 \leq \|\vec{u}\|^2 \|\vec{v}\|^2.$$

(Hint: Brug at $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\theta)$, hvor θ er vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$.)

14. I denne opgave vil vi bruge resultater fra vektorregning til at bevise sumformlerne for sinus og cosinus. Lad θ og ϕ være vinkler med $\theta > \phi$ og definer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \end{bmatrix}, \qquad \vec{v} = \begin{bmatrix} \cos(\phi) \\ \sin(\phi) \end{bmatrix}.$$

Disse to vektorer er skitseret i Figur 4



Figur 4: Opgave 14

(a) Redegør for at vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\theta - \phi$.

(b) Brug formlen for vinklen mellem vektorer til at vise sumformlen

$$\cos(\theta - \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi).$$

(c) Vis at man kan opnå formlen

$$\sin(\theta - \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) - \cos(\theta)\sin(\phi),$$

ved at anvende determinanten af $\vec{u}$ og $\vec{v}$. (Hint: vinklen regnes fra $\vec{v}$ til $\vec{u}$.)

15. Vis at $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$. Brug dette til at vise at

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

16. Brug Opgave 13 og Opgave 15 til at vise uligheden $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$. (Hint Regn på $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2$.)