Opgaver til kursusgang 21: Vektorer i rummet 2

1. Bestem en parameterfremstilling for linjen m gennem punkterne $P_1 = (11, 3, -4)$ og $P_2 = (1, -2, 6)$. Ligger $P = (5, 0, 1)$ på m?

2. Bestem en ligning for planen der indeholder $P = (1, -5, 4)$ og har normalvektor
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3. En plan α er givet ved ligningen
$$4x - 2y + z - 12 = 0.$$
Bestem skæringspunkterne mellem α og koordinatakserne.

4. Planen α er givet ved ligningen
$$3x - 2y + z - 20 = 0,$$
og linjen l har parameterfremstilling
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$
Bestem skæringspunkterne mellem α og l.

5. En plan er givet ved ligningen
$$2x + y - 5z + 2 = 0.$$
Beregn afstanden fra planen til punktet $P = (3, 2, -4)$.

6. Planen α er givet ved ligningen
$$2x - y - 2z + 3 = 0,$$
og linjen l har parameterfremstilling
$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$
   (a) Vis, at linjen l er parallel med planen α.
   (b) Bestem afstanden mellem α og l.

7. Udspænder vektorerne
$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -6 \end{bmatrix}$$
en plan?

8. Bestem en parameterfremstilling for skæringslinjen mellem planerne givet ved

$$x - y - z = 0, \qquad\qquad 2x + y + z = 3.$$

EKSTRAOPGAVER:

9. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ \frac{5}{2} \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

I denne opgave betragter vi $\vec{u}$ og $\vec{v}$ som stedvektorer

(a) Bestem en ligning for planen P som indeholder $\vec{u}$, $\vec{v}$ og origo.

(b) Hvad er arealet af parallelogrammet udspændt af $\vec{u}$ og $\vec{v}$.

(c) Planen Q har ligning

$$2x + 3y + 2z = 1.$$

Vis at P og Q hverken er parallelle eller sammenfaldende.

(d) Vis at skæringen mellem P og Q er givet ved linjen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

10. Hvis $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$ er stedvektorer der udspænder en plan i rummet så er projektionen $\vec{w}$ af stedvektoren $\vec{u}$ på denne plan givet ved

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_1}{||\vec{v}_1||^2}\vec{v}_1 + \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}_2}{||\vec{v}_2||^2}\vec{v}_2.$$

Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

og bestem projektionen $\vec{w}$ af $\vec{u}$ på planen udspændt af $\vec{v}_1$ og $\vec{v}_2$.