Opgaver til kursusgang 12: Grænseværdi og kontinuitet

1. Bestem de følgende grænseværdier

$$\lim_{x\to 2}(3x+1), \qquad \lim_{x\to -1} x, \qquad \lim_{x\to 0} x\cdot(x-1), \qquad \lim_{x\to -3}\frac{x+3}{x+1}$$

2. Lad $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x)=\begin{cases} 2x+3, & \text{hvis } x\neq 1\\ 6, & \text{ellers.}\end{cases}$$

   Bestem $\lim_{x\to 1} f(x)$ og $f(1)$. Brug dette til at afgør om f er kontinuert.

3. Lad $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2-1, & \text{hvis } x\neq 2\\ 7, & \text{ellers.}\end{cases}$$

   Bestem $\lim_{x\to 2} f(x)$ og afgør om f er kontinuert.

4. Lad $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{3}x+\frac{7}{6}, & \text{hvis } x< -\frac{1}{2}\\ -\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{3}x+1, & \text{hvis } x\geq -\frac{1}{2}.\end{cases}$$

   Bestem grænsen $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$ såfremt den er veldefineret.

5. Lad funktionen $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x-1, & \text{hvis } x<1\\ 4x^4-2x^2+1, & \text{hvis } x>1\\ 2, & \text{ellers.}\end{cases}$$

   Hvad er $f(1)$? Er f kontinuert i 1.

6. Bestem a og b så funktionen

$$f(x)=\begin{cases} ax, & \text{hvis } x<1\\ 5, & \text{hvis } x=1\\ bx^2+x+1, & \text{hvis } x>1\end{cases}$$

   er kontinuert i 1.

7. Bestem grænserne

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x}, \qquad \lim_{x\to -2}(x^2-x)e^{x^2}, \qquad \lim_{x\to -1} x\ln(x+3).$$

8. Bestem de følgende grænseværdier.

$$\lim_{x\to 3} x^2, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}, \qquad \lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-1}$$

   (Hint: Hvis nævneren går mod 0, er det ofte nødvendigt at faktorisere og forkorte brøken først.)

9. Bestem grænserne.
   (Hint: Hvis nævneren går mod 0, er det ofte nødvendigt at faktorisere og forkorte brøken først.)

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4-4x}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to -5} \frac{(x-1)(2x^2+14x+20)}{x^2+4x-5}$$

EKSTRAOPGAVER:

10. Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

   Bestem $f(0)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ og $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. I hvilke punkter er f kontinuert?

11. I denne opgave bestemmes grænseværdien for funktionen $\frac{\sin(x)}{x}$ når x går mod nul.

   (a) Figur 1 viser vinklen $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ indtegnet i enhedscirklen. Brug figuren til at vise uligheden

$$\frac{1}{2}\sin(x) \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan(x).$$

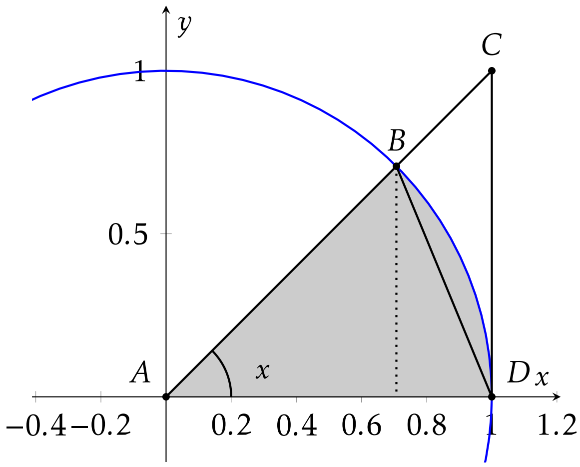
   (Hint: Sammenlign arealet af det grå cirkeludsnit med arealet af ΔACD og ΔABD).

   (b) Omskriv uligheden fra (a) til

$$\cos(x) \leq \frac{\sin(x)}{x} \leq 1.$$

   (c) Brug at $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ samt uligheden i (b) til at argumentere for at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



Figur 1: Opgave 11

12. Vis at

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

(Hint: Bruge Opgave 11, identiteten

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{-\sin^2(x)}{x(1 + \cos(x))} = -\frac{\sin(x)}{x} \frac{\sin(x)}{1 + \cos(x)}$$

og produktreglen for grænser.)