Opgaver til kursusgang 19: Vektorer i planen 2

1. En linje l går gennem punkterne $(1,-6)$ og $(-2,3)$. Bestem både parameterfremstillingen og ligningen for l samt linjens skæringspunkter med akserne.

2. Linjen l har ligning

$$x + 2y - 6 = 0$$

og linjen m har parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

hvor $t \in \mathbf{R}$. Gør rede for at l og m er parallelle.

3. Bestem skæringspunkterne mellem cirklen $x^2 + y^2 = 2$ og linjen med parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

4. Bestem ligningen for linjen gennem punkterne $(-2,1)$ og $(1,-1)$. Hvordan ligger denne linje i forhold til linjen med parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -5 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 9 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

5. Bestem parameterfremstillingen for linjen gennem punkterne $(-2,0)$ og $(5,5)$. Hvordan ligger denne linje i forhold til linjen

$$-10x + 14y = 21$$

6. Bestem parameterfremstillingen for linjen gennem punkterne $(-6,-2)$ og $(8,8)$. Hvordan ligger denne linje i forhold til linjen

$$3x + 2y = 9$$

7. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Beregn

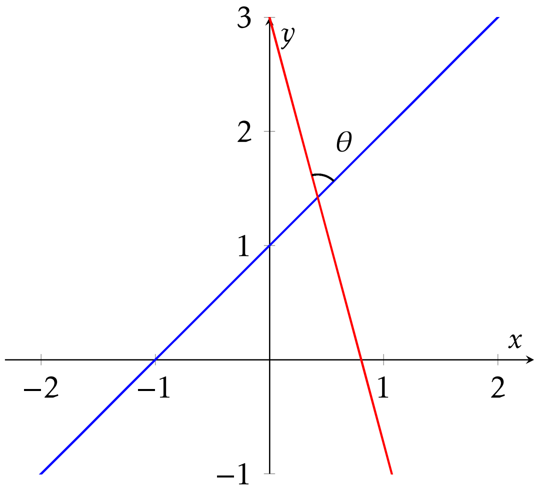
   (a) projektionen af $\vec{u}$ på $\vec{v}_1$.
   (b) projektionen af $\vec{u}$ på $\vec{v}_2$.
   (c) projektionen af $\vec{u}$ på $\vec{v}_3$.

EKSTRAOPGAVER:

8. Bestem parameterfremstillingen for linjen det går gennem skæringspunkterne til de to cirkler

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1, \qquad (x+1)^2+(y+1)^2=5.$$

9. I Figur 5 er linjerne $-x+y=1$ og $(2+\sqrt{3})x+y=3$ samt vinklen θ indtegnet. Bestem vinklen θ. (Hint: Bestem koordinater til vektorer som ligger parallelt med de to linjer og bestem vinklen mellem dem. Det kan også være nødvendigt at anvende formlen for vinklen mellem vektorer)



Figur 5: Opgave 9

10. I denne opgave vil vi projicere vektorer. Lad $\vec{u}$ og $\vec{v}$ være vektorer. Projektionen af $\vec{u}$ på $\vec{v}$ er en vektor $\vec{w}$ der har samme retning som $\vec{v}$ og så at afstanden fra $\vec{u}$ til $\vec{v}$ er mindst mulig. Linjestykket fra $\vec{u}$ til $\vec{w}$ må derfor være vinkelret på $\vec{w}$.

   (a) På Figur 6 ses en skitse af vektorerne $\vec{u}$, $\vec{v}$ og $\vec{w}$. Argumenter vha. trekanten afgrænset af $\vec{u}$, $\vec{w}$ og $\vec{u}-\vec{w}$ at

   $$\cos(\theta) = \frac{||\vec{w}||}{||\vec{u}||}.$$

   (b) Brug formlen for vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ til at konkludere at

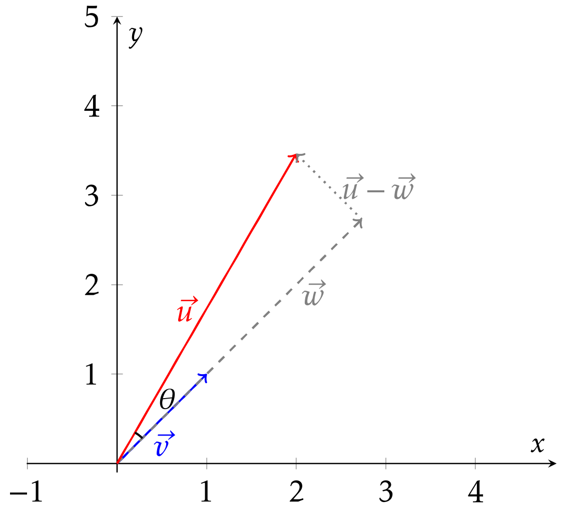
   $$||\vec{w}|| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{||\vec{v}||}. \tag{1}$$

   (c) Da $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har samme retning gælder at

   $$\frac{\vec{w}}{||\vec{w}||} = \frac{\vec{v}}{||\vec{v}||}.$$

Brug dette sammen med (1) til at vise at projektionen $\vec{w}$ af $\vec{u}$ på $\vec{v}$ er givet ved

$$\vec{w} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{v}||^2}\vec{v}$$



Figur 6: Opgave 10