

30. Kursusgang: Differentialligninger 4

Sidste gang betragtede vi homogene første ordens differentiaalligninger (hvor højresiden var lig 0). Nu vil vi i stedet studere inhomogene lineære første ordens differentiaalligninger.

En inhomogen lineær førsteordens differentiaalligning med variable koefficienter er på formen

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x).$$

Inhomogen betyder at højresiden er forskellig fra 0, førsteordens betyder, at der kun indgår en første afledede af f og variable koefficienter betyder, at funktionerne a og b kan variere, når x varierer (i modsætning til konstante koefficienter hvor $a(x) = k_1$ og $b = k_2$).

En sådan ligning har den fuldstændige løsning

$$f(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx + ce^{-A(x)}. \quad (1)$$

hvor $A(x)$ er en vilkårlig stamfunktion til a (ofte valgt med konstant lig 0). Formlen for den fuldstændige løsning kaldes ofte for Panserformlen.

Bemærk, at hvis $b(x) = 0$, så vi i stedet har en homogen første ordens differentiaalligning, så vil den fuldstændige løsning reduceres til

$$f(x) = ce^{-A(x)},$$

som vi genkender fra sidste gang.

Eksempler:

1. Bestem den fuldstændige løsning til differentiaalligningen $f'(x) + 6xf(x) = 18x$:

Vi ser, at det er en differentiaalligning på formen $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$, hvor $a(x) = 6x$ og $b(x) = 18x$. Vi har fra (1) at den fuldstændige løsning er givet ved

$$f(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx + ce^{-A(x)}.$$

Vi finder først en stamfunktion til a

$$A(x) = \int a(x) dx = \int 6x dx = 3x^2 + k,$$

hvor vi vælger $k = 0$. Det giver, at den fuldstændige løsning er

$$f(x) = e^{-3x^2} \int 18xe^{3x^2} dx + ce^{-3x^2}.$$

Vi udregner integralet ved hjælp af substitution, sæt $u = 3x^2$, så har vi at $\frac{du}{dx} = 6x$ og $\frac{1}{6x} du = dx$, hvilket giver

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-3x^2} \int 18xe^{3x^2} dx + ce^{-3x^2} \\ &= e^{-3x^2} \int 18xe^u \frac{1}{6x} du + ce^{-3x^2} \\ &= e^{-3x^2} \int 3e^u du + ce^{-3x^2} \\ &= e^{-3x^2} 3e^{3x^2} + ce^{-3x^2} \\ &= 3 + ce^{-3x^2}. \end{aligned}$$

2. Løs begyndelsesværdiproblemet $xf'(x) + 2f(x) = 3x$ med $f(1) = 5$:

Vi ser først at vores differentiaalligning ikke er på formen $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$, men hvis vi dividerer igennem med x på begge sider, får vi

$$\frac{xf'(x) + 2f(x)}{x} = \frac{3x}{x} \Leftrightarrow f'(x) + \frac{2}{x}f(x) = 3,$$

som er på formen $f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$ med $a(x) = \frac{2}{x}$ og $b(x) = 3$. Vi har igen, at den fuldstændige løsning er på formen

$$f(x) = e^{-A(x)} \int b(x)e^{A(x)} dx + ce^{-A(x)}.$$

Vi starter med at bestemme $A(x)$

$$A(x) = \int a(x) dx = 2 \int \frac{1}{x} dx = 2 \ln x + k,$$

hvor vi vælger $k = 0$. Hvis vi indsætter det i den fuldstændige løsning, får vi

$$\begin{aligned} f(x) &= 3e^{-2\ln x} \int e^{2\ln x} dx + ce^{-2\ln x} \\ &= 3(e^{\ln x})^{-2} \int (e^{\ln x})^2 dx + c(e^{\ln x})^{-2} \\ &= 3x^{-2} \int x^2 dx + cx^{-2} \\ &= 3x^{-2} \frac{1}{3}x^3 + cx^{-2} \\ &= x + cx^{-2} \end{aligned}$$

Vi bestemmer så c ved at benytte vores begyndelsesbetingelse

$$5 = f(1) = 1 + c1^{-2} = 1 + c \Leftrightarrow c = 4.$$

Hvilket betyder at løsningen til vores begyndelsesværdiproblem er

$$f(x) = x + 4x^{-2}.$$