Facit til kursusgang 30: Differentialligninger 4

1. Svaret er:

$$y(x) = 2 + ce^{-2x}.$$

2. Svaret er:

$$y(x) = -\frac{x}{3} - \frac{1}{9} + ce^{3x}.$$

3. Svaret er:

$$y(x) = \frac{1}{2}e^{x} + ce^{-x}.$$

4. Svaret er:

$$y(x) = 4 + ce^{-\frac{x^2}{2}}.$$

5. Svaret er:

$$y(x) = x^2 + \frac{c}{x}.$$

6. At der ikke er noget y led i differentialligningen svarer til at $k = 0$. Indsættes det i løsningsformlen får vi

$$y(x) = \int q(x)\,dx + c,$$

   Hvilket viser at løsningen fås ved at integrere begge sider.

7. I opgave 4 fra 29. kursusgang så vi at $A(t) = 3e^{-4t}$. Indsættes dette i differentialligningen for B fås

$$B' = 4(3e^{-4t}) - 2B.$$

   Bruger vi Panzerformlen får vi at

$$B(t) = e^{-2t}\int 12e^{-4t}e^{2t}\,dt + ce^{-2t} = -6e^{-4t} + ce^{-2t}$$

   Begyndelsesbetingelsen $B(0) = 0$ giver at $c = 6$ så $B(t) = 6(e^{-2t} - e^{-4t})$. Ved at anvende de sædvanlige optimeringsmetoder ses at B har et globalt maksimum når $t = \ln(\sqrt{2})$ og at $B(\ln(\sqrt{2})) = \frac{3}{2}$ og at $A(t) = \frac{3}{4}$.

8. Svaret er:

$$y(x) = ce^{-x} + \ln(x).$$

9. Svaret er

$$y(x) = e^{2\ln(x)}\int \frac{-8}{x}e^{-2\ln(x)}\,dx + ce^{2\ln(x)} = x^2(4x^{-2}) + cx^2 = 4 + cx^2$$

10. Svaret er:

$$y(x) = \frac{c}{x} - \frac{x}{4} + \frac{1}{2}x\ln(x).$$

11. Svaret er:

$$y(x) = ce^{2x} - \frac{1}{4}(2x^2 + 2x + 1).$$

EKSTRAOPGAVER:

12. Svarene er:

    (a) Funktionen f skal opfylde differentialligningen

    $$f'(x) = p(x)f(x)$$

    (b) Svaret er: $f(x) = e^{-P(x)}$.

    (c) Ved at gange differentialligningen igennem med $f(x) = e^{-P(x)}$ og bruge at $f' = pf$ så får vi at

    $$e^{P(x)}y'(x) + p(x)e^{P(x)}y(x) = q(x)e^{P(x)},$$

    hvilket vi ved hjælp af produktreglen omskriver til

    $$\frac{d}{dx}\Big(y(x)e^{P(x)}\Big) = e^{P(x)}q(x).$$

    Integrerer vi begge sider af ligningen ovenfor fås

    $$e^{P(x)}y(x) = \int q(x)e^{P(x)}\,dx + c$$

    og dividerer vi med $e^{P(x)}$ får vi at

    $$y(x) = e^{-P(x)}\int q(x)e^{P(x)}\,dx + ce^{-P(x)}$$

13. Svarene er:

    (a) $y_h(x) = ce^{-x}$.

    (b) Vi har at $y_p'(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ og indsætter vi dette i ligningen fås

    $$-a\sin(x) + b\cos(x) + a\cos(x) + b\sin(x) = \sin(x).$$

    Ud fra denne ligning ser vi at $a = -b$ og $-a + b = 1$. Disse to ligninger har løsningen $a = -\frac{1}{2}$ og $b = \frac{1}{2}$.

(c) Vi har at

$$y(x) = e{-}x \int \sin(x) e^x \, dx + c e^{-x} = \frac{1}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + c e^{-x}.$$

Dette er præcis den samme funktion som $y_h + y_p$.