17. Kursusgang: Optimering

Den sidste anvendelse af differentiabilitet, vi vil betragte, er emnet optimering. Optimering omhandler at finde de maksimale og/eller minimale værdier for en funktion. Vi så sidste gang, hvad et lokalt maksimum/minimum er. Vi kalder et punkt $(x_0, f(x_0))$ for et globalt maksimumspunkt, hvis der gælder

$$f(x) \leq f(x_0),$$

for alle x i domænet for f. På tilsvarende vis kalder vi et punkt $(x_0, f(x_0))$ for et globalt minimumspunkt hvis

$$f(x) \geq f(x_0),$$

for alle x i definitionsmængden for f.

Hvis vi gerne vil finde den mindste eller den største værdi en funktion f antager på et lukket interval $[a, b]$ (lukket betyder at endepunkterne a og b er med i intervallet), så er der tre muligheder for, hvor det kan ske:

1. Punktet $(x_0, f(x_0))$ kan være et globalt maksimum/minimum, hvis $f'(x_0) = 0$.
2. Punktet $(x_0, f(x_0))$ kan være et globalt maksimum/minimum, hvis $f'(x_0)$ ikke er defineret.
3. Punktet $(x_0, f(x_0))$ kan være et globalt maksimum/minimum, hvis $x_0 = a$ eller $x_0 = b$.

Det betyder, at hvis vi vil finde den største (mindste) værdi for en funktion i intervallet $[a, b]$, så skal vi undersøge disse tre tilfælde, og vælge den største (mindste) værdi.

Bonus info: Bemærk, at hvis vores interval $x \in]a, b[$ er åbent så skal punkt 3. byttes ud med

3*. Hvis $\lim_{y \to a} f(y) \geq f(x)$ eller $\lim_{y \to b} f(y) \geq f(x)$, for alle $x \in (a, b)$, så har f ikke noget maksimum i intervallet $]a, b[$,

4*. Hvis $\lim_{y \to a} f(y) \leq f(x)$ eller $\lim_{y \to b} f(y) \leq f(x)$, for alle $x \in (a, b)$, så har f ikke noget minimum i intervallet $]a, b[$,

da vi i det tilfælde ikke kan garantere, at der er et globalt maksimum/minimum.

Eksempler:

1. Find den mindste værdi som funktionen $f(x) = |x|$ i intervallet $x \in [-3, 3]$:

   Vi husker at $f(x) = |x|$ betyder at

   $$f(x) = \begin{cases} x & \text{hvis } x \geq 0, \\ -x & \text{hvis } x < 0. \end{cases}$$

   Vi tjekker nu de tre mulige tilfælde, hvor det globale minimum kan være. Først husker at vi $f(x) = |x|$ ikke er differentiabel i punktet $x = 0$, hvilket betyder, at $f(0) = 0$ muligvis er det globale minimum.

Derudover, har vi at

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{hvis } x > 0, \\ -1 & \text{hvis } x < 0, \end{cases}$$

hvilket betyder, at der ikke eksisterer nogle punkter hvor $f'(x) = 0$.

Til sidst tjekker vi værdien af f i endepunkterne, hvilket giver

$$f(-3) = |-3| = 3 \qquad \text{og} \qquad f(3) = |3| = 3.$$

Derfor har det globale minimum for $f(x) = |x|$ i intervallet $x \in [-3, 3]$ værdien 0.

2. Find den største værdi som funktionen $f(x) = |x|$ antager i intervallet $[-2, 4]$:

   Vi har fra Opgave 1., at der ikke er nogen løsninger til $f'(x) = 0$, og at værdien for det punkt, hvor den afledede af f ikke eksisterer, er 0. Derfor mangler vi kun at tjekke de to endepunkter

   $$f(-2) = |-2| = 2 \qquad \text{og} \qquad f(4) = |4| = 4.$$

   Dermed kan vi se, at værdien af det globale maksimum for $f(x) = |x|$ i intervallet $x \in [-2, 4]$ er 4.

3. Find det globale maksimum for funktionen $f(x) = -x^2$ i intervallet $x \in [-10, 10]$:

   Vi tjekker igen de tre muligheder for et maksimum. Først finder vi den afledede af f ved at differentiere

   $$f'(x) = \frac{d}{dx}(-x^2) = -2x.$$

   Det betyder at $f'(x)$ er defineret i hele vores interval, og det eneste punkt, der opfylder at $f'(x) = 0$, er $x = 0$ med værdien $f(0) = 0$. Vi mangler nu kun at tjekke endepunkterne

   $$f(-10) = -(-10)^2 = -100 \qquad \text{og} \qquad f(10) = -10^2 = -100.$$

   Dermed kan vi se, at værdien af det globale maksimum for $f(x) = -x^2$ i intervallet $[-10, 10]$ er 0.

4. Antag, at vi har en firkantet mark, der støder op til et vandløb. Derudover, har vi 120 m hegn. Vi skal indhegne en del af marken i en firkant, hvor den ene side er afgrænset af vandløbet. Find længden og bredden af denne indhegning, så arealet af indhegningen bliver størst mulig:

   Lad x og y betegne henholdsvis længden og bredden. Så beskriver funktionen

   $$A(x, y) = xy$$

   arealet af vores indhegning. Da vi har 120 m hegn, har vi derudover ligningen,

   $$2x + y = 120$$

x	10	30	40
$f'(x)$	80	0	-40
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

Tabel 1: Monotonilinje for $A(x) = 120x - x^2$.

og hvis vi isolerer y i den får vi

$$y = 120 - 2x.$$

Hvis vi indsætter dette på y's plads i A, så får vi i stedet en funktion, der kun afhænger af variablen x givet ved

$$A(x) = x(120 - 2x) = 120x - 2x^2,$$

hvor $x \in]0, 60[$. For at løse vores problem, skal vi derfor finde det globale maksimum for A. Vi finder først den afledede

$$A'(x) = \frac{d}{dx}(120x - 2x^2) = 120 - 4x.$$

Dernæst finder vi de $x \in]0, 60[$ som opfylder at $A'(x) = 0$

$$\begin{aligned} A'(x) = 0 &\Leftrightarrow 120 - 4x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 30. \end{aligned}$$

Ved at tegne en monotonilinje (se Tabel 1) ser vi, at $x = 30$ er et lokalt maksimum (se Tabel 1) med værdien $A(30) = 1800$.

Derudover ser vi, at $f'(x)$ er defineret for alle $x \in]0, 60[$. Da vores interval $x \in]0, 60[$ er åbent, mangler vi nu kun at tjekke endepunkterne for at se om der er et globalt maksimum.

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} A(x) &= \lim_{x \to 0^+} 120x - 2x^2 = 120 \cdot 0 - 2 \cdot 0^2 = 0 \\ \lim_{x \to 60^-} A(x) &= \lim_{x \to 60^-} 120x - 2x^2 = 120 \cdot 60 - 2 \cdot 60^2 = 0. \end{aligned}$$

Da $A(30)$ er større end de to grænseværdier, har vi, at $A(30)$ er vores globale maksimum. Dvs. at for at få det størst mulige areal, skal $x = 30$ og $y = 120 - 2 \cdot 30 = 60$.