

Facit til kursusgang 5: Ligninger og uligheder

1. Svarene er:

$$x = 3, \quad x = -3, \quad x = 6, \quad x = \frac{-3}{4}.$$

2. Svarene er:

$$x = -1, \quad x = 12, \quad x = \frac{-7}{2}.$$

3. Svarene er:

$$\text{Ingen løsning,} \quad x \in \mathbb{R}.$$

4. Svarene er:

$$x = \frac{13}{4}, \quad x = \frac{6}{11}.$$

5. Svarene er:

$$x < \frac{4}{7}, \quad x > \frac{5}{2}, \quad \text{ingen løsning,} \quad x \geq \frac{7}{2}.$$

6. Svarene er:

$$x = \frac{11}{5}, \quad x = 1, \quad x = \frac{7}{2}, \quad x = -3.$$

7. Svarene er:

$$x = 2\sqrt{2}, \quad x = \frac{\pi + 3}{\pi - \sqrt{2}}, \quad x = \frac{5}{2}.$$

8. Svarene er:

(a) Kvadrat med hjørnerne: $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 2)$ og $(2, 2)$.

(b) Cirkelskive med centrum i $(0, 0)$ og radius $r = 2$.

(c) Trapez med hjørnerne: $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 6)$ og $(2, 0)$.

9. Svarene er:

(a) Rektangel: $-4 \leq x \leq -2$, $0 \leq y \leq 4$.

(b) Cirkelskive: $(x + 2)^2 + (y + 3)^2 \leq 4$.

(c) Trekant: $0 \leq x \leq 4$, $\frac{1}{2}x \leq y \leq 2$, eller $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq x \leq 2y$.

10. Det er klart at $0 \leq (a - b)^2$. Bruges kvadratsætningerne fås

$$0 \leq (a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$$

Ved at flytte lidt rundt på ovenstående ulighed fås

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}.$$

Bemærk at der findes uendeligt mange valg af a, b, c, d . En mulighed er: $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ og $d = 1$.

11. Bruges kvadratsætningerne fås

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}.$$

Da $a, b \geq 0$ er det sidste led positivt. Dette kan derfor fjernes, hvilket giver følgende ulighed

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \geq a + b.$$

Tages kvadratroden på begge sider fås den ønskede ulighed

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} \geq \sqrt{a + b}.$$

Bemærk at der findes uendeligt mange valg af a, b, c, d som løser opgaven. En mulighed er: $a = 0, b = 0, c = 1$ og $d = 1$.