Opgaver til kursusgang 26: Bestemte integraler 2

1. Udregn

$$\int_0^1 2(2x+2)^3\,dx, \qquad \int_0^2 (1+x)^4\,dx, \qquad \int_1^2 x\ln(x)\,dx$$

2. Udregn

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(-x)\,dx, \qquad \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} 3x^2\cos(x^3)\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)\sin^2(x)\,dx$$

3. Udregn

$$\int_0^2 3x^2\sqrt{x^3+1}\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1+\sin x}\,dx, \qquad \int_0^1 \frac{x}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

4. Beregn integralet

$$\int_0^{\pi} x\cos x\,dx.$$

5. Beregn integralerne

$$\int_0^{\pi} x^2\cos x\,dx, \qquad \int_0^{\ln 2} xe^{2x}\,dx, \qquad \int_1^4 3x^2\ln x\,dx.$$

6. Beregn integralerne

$$\int_{-2}^0 \ln(x^2+x+1)\cdot(4x+2)\,dx, \qquad \int_{-3}^{-1} (3x^2-x)\cdot\sqrt{-x^3+\frac{x^2}{2}-\frac{-3}{2}}\,dx.$$

EKSTRAOPGAVER:

7. En funktion f siges at være ulige hvis $f(-x) = -f(x)$. Vis at

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0,$$

såfremt f er kontinuert. (Hint: Brug variabelskiftet $u = -x$ og opgave 9 fra 25. kursusgang til at vise

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_0^a f(x)\,dx.$$

Brug efterfølgende opgave 7 også fra 25. kursusgang til at færdiggøre opgaven.)

8. Udregn

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (3x^2-1)(x^3-x)^3\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} \sin(x)e^{\cos(x)}\,dx, \qquad \int_{-100}^{100} x|x|\,dx.$$

(Hint: Brug Opgave 7)

9. En funktion f siges at være lige hvis $f(-x) = f(x)$. Vis at

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx,$$

såfremt f er kontinuert. (Hint: Brug variabelskiftet $u = -x$ og opgave 9 fra 25. kursusgang til at vise

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Brug efterfølgende opgave 7 også fra 25. kursusgang til at færdiggøre opgaven.)

10. Udregn

$$\int_{-\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}}^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} 6x^2\cos(x^3)\,dx, \qquad \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(x)\sin^2(x)\,dx$$

(Hint: Brug Opgave 9)

11. Lad $f(x) = x^{-2}\sin(\frac{1}{x})$.

    (a) Vis at f er en ulige funktion.

    (b) Bestem en stamfunktion til f.

    (c) Integralet

    $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx,$$

    er ikke defineret. Hvordan stemmer det overens med resultatet i Opgave 7?

12. I opgave 2 fra 14. kursusgang blev det vist at

$$\int xe^x\,dx = (x-1)e^x + C.$$

Brug dette til at vise at

$$\int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

(Hint: substituer $u = \sqrt{x}$ så variabelskiftet bliver $2u\,du = dx$.)

13. I opgave 1 fra 23. kursusgang så vi at

$$\int x \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + C.$$

Brug dette til at vise at

$$\int_0^{\pi^2} \sin \sqrt{x} \, dx = 2\pi$$

(Hint: substituer $u = \sqrt{x}$ så variabelskiftet bliver $2u du = dx$.)

14. I denne opgave vil vi beskrive arealet af en cirkel med vilkårlig radius.

    (a) Tallet π kan defineres som arealet af enhedscirklen. Brug denne definition til at konkludere at

    $$4 \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} \, dx = \pi.$$

    (Hint: Enhedscirklen er defineret ved $x^2 + y^2 = 1$.)

    (b) Brug formlen ovenfor til at vise at arealet af cirklen givet ved $x^2 + y^2 = r^2$ har areal $A = \pi r^2$. (Hint: Brug udregningen

    $$A = 4 \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \, dx = 4r \int_0^r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}} \, dx,$$

    og substituer $u = \frac{x}{r}$.)

15. En ellipse kan beskrives ved ligningen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{1}$$

hvor betydningen af a og b kan ses i Figur 1.

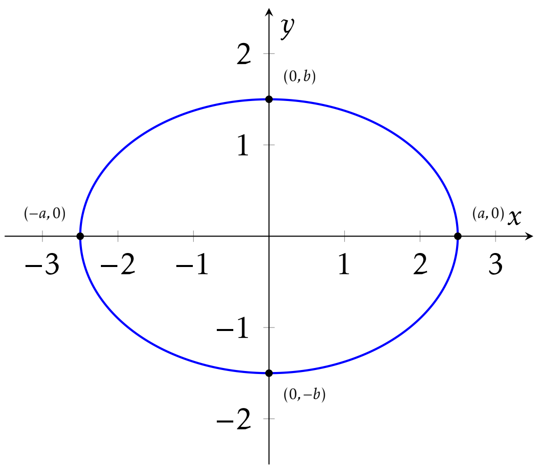
    (a) Vis at hvis $a = b$ så beskriver (1) en cirkel.

    (b) Brug samme fremgangsmåde som i Opgave 14 til at vise at arealet af en ellipse er givet ved πab.

    (c) Hvordan stemmer dette over ens med at arealet af en cirkel er givet ved πr^2.

16. Bestem arealet afgrænset af x-aksen og grafen for funktionen $f(x) = x^2 \sin x$ fra 0 til π.

17. Funktionerne $\sin(x)\cos(x)$ og $\frac{1}{2}\sin x$ skærer hinanden i 0 og $\frac{\pi}{3}$. Hvad er arealet mellem graferne for funktionerne i intervallet givet af deres skæringspunkter?



Figur 1: Opgave 15