

Opgaver til kursusgang 25: Bestemte integraler 1

1. Udregn følgende bestemte integraler

$$\int_1^2 x^2 dx, \quad \int_{-1}^0 x + 3x^2 dx, \quad \int_1^2 \frac{1}{x} dx, \quad \int_{-1}^1 \sin x dx.$$

2. Udregn følgende bestemte integraler

$$\int_0^2 2x^2 - x + 4 dx, \quad \int_{-1}^1 x^3 - 2x^2 + 5 dx, \quad \int_2^4 \frac{1}{3}x^3 + \frac{4}{x} dx.$$

3. Bestem arealet under grafen for funktionen $f(x) = e^x$ i intervallet $[1, 3]$.
4. Vis at det bestemte integral af den konstante funktion $f(x) = 1$ over intervallet $[a, b]$ er lig intervallængden.
5. Bestem arealet som afgrænses af funktionerne $f(x) = x^2$ og $g(x) = \sqrt{x}$ i intervallet $(0, 1)$.
6. Brug bestemte integraler til at vise at et rektangel med sidelængder a og b har areal ab .
7. Vis at

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

for alle punkter $a, b, c \in \mathbf{R}$ og alle kontinuerte f . (Hint: Lad F være en stamfunktion til f og regn på højresiden af ovenstående lighed.)

8. Bestem arealet under kurven $f(x) = |x|$ i intervallet $[-2, 1]$. (Hint: Anvend Opgave 7 med $a = -2$, $b = 1$ og $c = 0$.)
9. Vis at

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

(Hint: Regn på højresiden.)

10. Bestem

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \tan(x) dx.$$

(Hint: $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.)

11. Bestem en værdi af a således at

$$\int_0^a \sin(x) dx = 2$$

12. Bestem arealet under grafen for funktionen $f(x) = -\cos x$ i intervallet $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$.

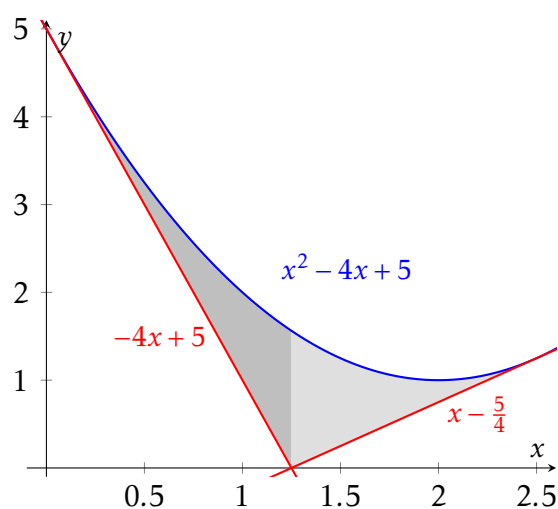
EKSTRAOPGAVER:

13. Lad

$$f(x) = \begin{cases} x^{\frac{2}{3}}, & \text{hvis } x < 0, \\ x^{\frac{1}{3}}, & \text{hvis } x \geq 0, \end{cases}$$

Bestem arealet mellem grafen for f og x -aksen i intervallet $[-1, 1]$.

14. Bestem arealet mellem graferne for funktionerne $f(x) = x^2$ og $g(x) = 1 - x^2$.
15. Hvilket af de to grå områder i Figur 1 har det største areal? Hvad er det samlede areal af begge grå områder?



Figur 1: Opgave 15