

Facit til kursusgang 14: Differentialregning 2

1. Svarene er:

$$f'(x) = \sin(x) + x \cdot \cos(x), \quad f'(x) = -\frac{14}{(2x-4)^2}, \quad f'(x) = -x^3 \cdot (1 + 4 \cdot \ln(x)).$$

2. Svaret er: $f'(x) = xe^x$.

3. Svarene er:

$$f'(x) = 3(x+1)e^x, \quad f'(x) = 4x \sin(x) + 2x^2 \cos x, \quad f'(x) = \frac{3x^2 - 6x - 1}{(x-1)^2}.$$

4. Svarene er:

$$f'(x) = \frac{2x^8 - 20x^4 - 4x^3}{(x^4 - 2)^2}, \quad f'(x) = -10 \cdot x^{-3} = -\frac{10}{x^3}, \quad f'(x) = -\frac{1}{\cos^2(x)}$$

5. Svarene er:

$$f'(x) = \frac{1 - xe^x}{(1+x)^2}, \quad f'(x) = \frac{e^x + 1 - xe^x}{(e^x + 1)^2}, \quad f'(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}, \quad f'(x) = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

6. Svarene er:

$$e^{-x}x^2 - 4xe^{-x} + 2e^{-x}, \quad e^x \ln(x) + 2\frac{e^x}{x} - \frac{e^x}{x^2}, \quad \sin(x) + 4x \cos(x) - x^2 \sin(x).$$

7. Svaret er: $f'(x) = \ln(x)$.

8. Bruger vi hintet får vi

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{d}{dx} \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)}.$$

Dividerer vi igennem med $\cos^2(x)$ får vi at

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = 1 + \tan^2(x)$$

og havde vi i stedet brugt idiotformlen ville vi få

$$\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

EKSTRAOPGAVER:

9. Hvis vi definerer $k(x) = (f \cdot g)(x)$ giver produktreglen at

$$\frac{d}{dx}(f \cdot g \cdot h)(x) = \frac{d}{dx}(k \cdot h)(x) = k'(x) \cdot h(x) + k(x) \cdot h'(x).$$

Bruger vi produktreglen på $k(x)$ får vi at

$$k'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x),$$

og indsættes dette i forrige formel får vi at

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(f \cdot g \cdot h)(x) &= (f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) \\ &= f'(x) \cdot g(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g'(x) \cdot h(x) + f(x) \cdot g(x) \cdot h'(x) \end{aligned}$$

10. Vi ved allerede at

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

og differentierer vi dette en gang til får vi

$$(f \cdot g)''(x) = \frac{d}{dx}(f'(x) \cdot g(x)) + \frac{d}{dx}(f(x) \cdot g'(x)).$$

Anvender vi produktreglen på hvert led og reducerer udtrykket får vi

$$\begin{aligned} (f \cdot g)''(x) &= f''(x) \cdot g(x) + f'(x) \cdot g'(x) + f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g''(x) \\ &= f''(x) \cdot g(x) + 2f'(x) \cdot g'(x) + f(x) \cdot g''(x). \end{aligned}$$

11. Svarene er:

$$\begin{aligned} f'(x) &= xe^x(1 + (2+x)\ln(x)), \\ g'(x) &= x \cdot e^{-2x}(2 \cdot \ln(x) \cdot (1-x) + 1), \\ h'(x) &= \frac{e^x(1 - (x+1)\ln(x))}{(\ln(x))^2} \end{aligned}$$