Opgaver til kursusgang 29: Differentialligninger 3

1. Løs ligningerne

$$y' + x \cdot y = 0, \qquad y' - x^2 \cdot y = 0, \qquad y' - y = 0$$

2. Løs ligningerne

$$y' - 2x \cdot y = 0, \qquad y' = -3x^2 \cdot y, \qquad \frac{y'}{y} = \pi \cdot x.$$

3. Løs ligningerne

$$\frac{y'}{2x} + 3y = 0, \qquad \frac{3}{y} = -\frac{2x}{y'},$$

   begge med begyndelsesbetingelser $y(0) = -1$.

4. Et radioaktivt materiale henfalder med en hastighed der er proportional til mængden af materiale. Hvis $A(t)$ betegner mængden af det radioaktive materiale til tiden t så vil A opfylde differentialligningen

$$A' = -kA,$$

   for en konstant k. Bestem en formel for A når $k = 4$ og der til $t = 0$ er $3kg$ materiale. Hvor lang tid går der før der er $\frac{3}{2}kg$ materiale?

5. Lad $p(x)$ være en funktion med stamfunktion $P(x)$. Brug samme metode som i opgave 13 fra 27. kursusgang til at finde den fuldstændige løsning til

$$y' + p(x)y = 0.$$

6. Bestem den fuldstændige løsning til

$$y' = \frac{x^2 y - 4y}{2 + x}.$$

7. Bestem en løsning til

$$y' - \frac{y}{x} = 0.$$

8. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{y'}{\ln(x)} = y,$$

   hvor $x > 0$.

9. Bestem den generelle løsning til hver af differentialligningerne

$$y' + 3x^2 y = 0, \qquad y' + 2xy = 0, \qquad xy' + y = 0.$$

EKSTRAOPGAVER:

10. Tidligere har vi løst ligningssystemer, altså flere ligninger med flere ubekendte. På tilsvarende vis findes der systemer af differentialligninger. Et eksempel kunne være

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 + y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2. \end{aligned}$$

Vis at

$$y_1(x) = 20(e^x + 5e^{5x}), y_2(x) = 10(-6e^x + 10e^{5x}).$$

er en løsning til systemet af differentialligninger ovenfor som opfylder begyndelsesbetingelserne $y_1(0) = 120$ og $y_2(0) = 40$.

11. I denne opgave vil vi løse differentialligningen

$$y'' + \frac{k}{x}y' = 0,$$

hvor $k \in \mathbf{R}$ og $y', x > 0$.

(a) Substituer $u = y'$ og vis at

$$y'(x) = \frac{c}{x^k}, \tag{1}$$

for en konstant $c \in \mathbf{R}$.

(b) Bestem y ud fra (1) for $k = 1$ og $k \neq 1$.

(c) Bestem for $k = 1$ en løsning som opfylder $y(1) = 1$ og $y'(1) = 2$.