

Opgaver til kursusgang 15: Differentialregning 3

1. Differentier funktionerne

$$f(x) = (2 - 3x)^4, \quad f(x) = \sqrt{2x + 4}, \quad f(x) = 3^{x^2}.$$

2. Differentier funktionerne

$$f(x) = (4x + 2)^2, \quad f(x) = (1 - 2x^2)^3, \quad f(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

3. Differentier funktionerne

$$f(x) = \ln(x + 3), \quad f(x) = e^{2x+x^2}, \quad f(x) = \sin(x - 1), \quad f(x) = \sqrt{\ln(x)}.$$

4. Differentier funktionerne

$$f(x) = e^{x^2}, \quad g(x) = \frac{1}{\ln(x)} + \tan(x^2), \quad h(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 1}.$$

5. Differentier funktionen $f(x) = \ln(\ln(x))$.

6. Brug at $\frac{d}{dx} \tan(x) = 1 + \tan^2(x)$ til at vise at

$$\frac{d^2}{dx^2} \tan(x) = 2 \tan(x) + 2 \tan^3(x).$$

7. Vis at

$$\frac{d}{dx} \cos^2(x) = -\sin(2x), \quad \frac{d}{dx} \sin^2(x) = \sin(2x).$$

Hint: $\sin(2x) = 2 \cos(x) \sin(x)$.

8. Bestem den afledede af funktionerne $f(x) = \ln\left(\frac{1}{\cos(x)}\right)$ og $g(x) = \ln(\sin(x))$.

9. Lad $f(x) = \frac{\sin^2(x) \cos(x)}{\tan(x)}$. Vis at

$$f'(x) = \cos^3(x) - 2 \sin^2(x) \cos(x).$$

10. Differentier funktionerne

$$f(x) = \cos^2((x - 1)^5), \quad g(x) = e^{\cos(x^2)}.$$

EKSTRAOPGAVER:

11. Differentier funktionen $f(t) = \sqrt{e^{4t} + e^{-4t} - 2}$.

12. Lad f, g, h være differentiable funktioner. Brug kædereglen til at vise at

$$(f \circ g \circ h)'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

13. Funktionen $f(x) = a^x$ hvor $a > 1$ er differentiabel. Brug kædereglen til at bestemme $f'(x)$. (Hint: Benyt omskrivningen $a^x = e^{x \ln(a)}$.)

14. Brug produktreglen og kædereglen til at vise kvotientreglen. (Hint: Skriv $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)(g(x))^{-1}$.)

15. Vis at

$$\frac{d}{dx} \left(x(\ln(x))^2 - 2x \ln(x) + 2x \right) = (\ln(x))^2$$

16. Bestem den afledede til funktionen $f(x) = \log_a(x)$ ved at benytte omskrivningen:
 $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$.