Opgaver til kursusgang 30: Differentialligninger 4

1. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + 2y = 4.$$

2. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} - 3y = x.$$

3. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + y = e^x.$$

4. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + x \cdot y = 4x.$$

5. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y = 3x.$$

6. Den generelle løsningsformel for en inhomogen førsteordens differentialligning med konstante koefficienter

$$y' + ky = q(x),$$

   er givet ved

$$y(x) = e^{-kx} \int q(x) e^{kx}\, dx + ce^{-kx}.$$

   Brug dette til at bestemme en formel for løsningen af en inhomogen førsteordens differentialligning som ikke indeholder et y afhængigt led.

7. Antag at det radioaktive materiale i opgave 4 fra 29. kursusgang, med mængde beskrevet ved $A(t)$, henfalder til et andet radioaktivt materiale, med mængde beskrevet ved $B(t)$. Dette radioaktive materiale henfalder også med en hastighed der er proportionel med mængden $B(t)$. Det betyder at den afledede af B både afhænger af A og B. Vi har dermed ligningen

$$B' = k_1 A - k_2 B.$$

   Løs ligningen når $k_1 = 4$, $k_2 = 2$, $A(0) = 3$ og $B(0) = 0$. (Hint: Brug formlen for $A(t)$ fundet i opgave 4 fra 29. kursusgang). Hvad er den største værdi af $B(t)$ og hvor stor er $A(t)$ på det tidspunkt?

8. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen
$$y' + y = \frac{1}{x} + \ln x.$$
9. Bestem den fuldstændige løsning til
$$xy' = 2(y - 4).$$
10. Bestem den fuldstændige løsning til
$$y' + \frac{y}{x} = \ln(x).$$
11. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen
$$y' - 2y = x^2.$$

EKSTRAOPGAVER:

12. Vi vil gerne finde en generel formel til at løse differentialligninger på formen
$$y' + p(x)y = q(x), \tag{1}$$
hvor p og q er kontinuerte funktioner. En måde at gøre dette på er at anvende produktreglen for differentiation:
$$(yf)'(x) = y'(x)f(x) + y(x)f'(x). \tag{2}$$
   (a) Ved at gange (1) igennem med $f(x)$ får vi at
   $$y'(x)f(x) + p(x)f(x)y(x) = f(x)q(x). \tag{3}$$
   Hvilken differentialligning skal f opfylde for at vi kan anvende produktreglen? (Hint: sammenlign højresiden af (2) med venstresiden af (3))
   (b) Brug opgave 5 fra 29. kursusgang til at finde en løsning til differentialligning vi bestemte i del (a).
   (c) Redegør for at vi kan omskrive (1) til
   $$\frac{d}{dx}\left(y(x)e^{P(x)}\right) = e^{P(x)}q(x),$$
   hvor P er en stamfunktion til p. Brug dette til at bestemme den generelle løsning til (1). (Hint: Ved at integrere begge sider af ligningen ovenfor får vi at
   $$y(x)e^{P(x)} = \int q(x)e^{P(x)}\,dx + c,$$
   hvorefter vi kan isolere for y.

13. Betragt ligningen

$$y' + y = \sin(x). \tag{4}$$

(a) Bestem den fuldstændige løsning y_h til den homogene ligning

$$y' + y = 0.$$

(b) Bestem a og b så $y_p(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$ bliver en partikulær løsning til (4).

(c) Brug løsningsformlen for inhomogene førsteordens differentialligninger til at løse ligningen. Hvad er forskellen på denne løsning og $y_h + y_p$. (Hint: Brug opgave 5 fra 23. kursusgang)