Facit til kursusgang 15: Differentialregning 3

1. Svarene er:
$$f'(x) = -12 \cdot (2-3x)^3, \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x+4}}, \qquad f'(x) = 2x \cdot 3^{x^2} \cdot \ln(3).$$

2. Svarene er:
$$f'(x) = 32x + 16, \qquad f'(x) = -12x \cdot (1-2x^2)^2, \qquad f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

3. Svarene er:
$$f'(x) = \frac{1}{x+3}, \quad f'(x) = (2x+2)e^{2x+x^2}, \quad f'(x) = \cos(x-1), \quad f'(x) = \frac{1}{2x\sqrt{\ln(x)}}.$$

4. Svarene er:
$$f'(x) = 2x \cdot e^{x^2}, \quad g'(x) = -\frac{1}{x \cdot (\ln(x))^2} + 2x(1+\tan^2(x^2)), \quad h'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-1}}$$

5. Vi har at
$$f'(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$$

6. Vi ved allerede at
$$\frac{d}{dx}\tan(x) = 1 + \tan^2(x).$$
Differentierer vi vha. kædereglen får vi
$$\frac{d^2}{dx^2}\tan x = 2\tan(x)(1+\tan^2(x)) = 2\tan(x) + 2\tan^3(x).$$

7. Ved at anvende kædereglen samt formlen $\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$ får vi
$$\frac{d}{dx}\cos^2(x) = 2\cos(x)(-\sin(x)) = -\sin(2x).$$
Gør vi det samme med $\sin^2(x)$ får vi
$$\frac{d}{dx}\sin^2 x = 2\sin(x)\cos(x) = \sin(2x).$$

8. Svarene er: $f'(x) = \tan(x)$ og $g'(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} = \frac{1}{\tan(x)}$.

9. For at simplificere vores udregninger reducerer vi først brøken. Ved at anvende $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ får vi at
$$f(x) = \frac{\sin^2(x)\cos(x)}{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}} = \sin(x)\cos^2(x).$$
Ved at differentiere får vi så
$$f'(x) = \cos^3(x) + \sin(x)(2\cos(x)(-\sin(x))) = \cos^3(x) - 2\sin^2(x)\cos(x).$$

10. Svarene er:

$$f'(x) = -5(x-1)^4 \sin(2(x-1)^5),$$
$$g'(x) = -2x \sin(x^2) e^{\cos(x^2)}.$$

EKSTRAOPGAVER:

11. Hvis man er skarp kan man se at

$$f(t) = \sqrt{e^{4t} + e^{-4t} - 2} = \sqrt{(e^{2t} - e^{-2t})^2} = e^{2t} - e^{-2t},$$

hvilket let giver at $f'(t) = 2(e^{2t} + e^{-2t})$.
Indser man ikke dette vil man få

$$f'(t) = \frac{2(e^{4t} - e^{-4t})}{\sqrt{e^{4t} + e^{-4t} - 2}}.$$

Bemærk at $\frac{2(e^{4t}-e^{-4t})}{\sqrt{e^{4t}+e^{-4t}-2}} = 2(e^{2t} + e^{-2t})$, dog kræver det mange svære omskrivninger at komme frem til det.

12. Lad $k(x) = (g \circ h)(x)$. Så er $k'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$ og bruger vi kædereglen får vi at

$$(f \circ g \circ h)'(x) = (f \circ k)'(x) = f'(k(x)) \cdot k'(x) = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x).$$

13. Hvis vi bruger hintet samt den forrige opgave får vi at

$$1 = a^{\log_a(x)} \ln(a) \frac{d}{dx} \log_a(x),$$

og isolerer vi for $\frac{d}{dx} \log_a(x)$ får vi at

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{x \ln a}.$$

14. Bruger vi hintet får vi at

$$\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{d}{dx} f(x)(g(x))^{-1} = f'(x) g^{-1}(x) - f(x) g^{-2}(x) g'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

15. Ved at differentiere får vi

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}\Big(x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x\Big) &= (\ln(x))^2 + \frac{2x\ln(x)}{x} - 2\ln(x) - \frac{2x}{x} + 2 \\ &= (\ln(x))^2 + 2\ln(x) - 2\ln(x) - 2 + 2 = (\ln(x))^2.\end{aligned}$$

16. Da

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)},$$

kan vi differentiere $f(x) = \log_a(x)$ som en konstant gange en funktion:

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$$

Altså er

$$\frac{d}{dx} \log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}.$$