Opgaver til kursusgang 17: Optimering

1. I denne opgave betragtes en kasse med højde $5cm$, længde x og bredde y. Bestem det maksimale rumfang kassen kan have når bundens omkreds skal være $20cm$.

2. Find lokale maksimum og minimum for funktionen $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - x^2 + 1$

3. Et $300m$ langt hegn skal indhegne et rektangulært område. Bestem sidelængderne i rektanglet så arealet bliver størst muligt.

4. En mand vil lave en rektangulær indhegning op mod en mur. Et $300m$ langt hegn skal derfor indhegne tre af siderne i et rektangulært område. Bestem sidelængderne i rektanglet så arealet bliver størst muligt.

5. Brug differentialregning til at vise toppunktsformlen for et andengradspolynomium.

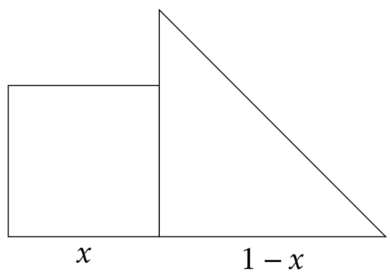
6. En åben kasse skal have kvadratisk bund og et rumfang på $500cm^2$. Bestem sidelængden i bunden og højden så kassens overfladeareal bliver mindst muligt.

7. Funktionen f givet ved $f(x) = ax^3 + bx^2$ har et lokalt ekstremumspunkt i $(2,2)$. Bestem a og b.

8. Et kvadrat og en ligebenet trekant er givet som i Figur 1.

   (a) Bestem x så det samlede areal af kvadratet og trekanten bliver størst muligt.

   (b) Bestem x så det samlede areal af kvadratet og trekanten bliver mindst muligt.



Figur 1: Opgave 8

EKSTRAOPGAVER:

9. Har funktionen $f(x) = 1 - \sqrt[5]{x^2}$ et maksimum. Hvis ja så bestem det givne maksimum.

10. Bestem de punkter hvor tangenthældningen til grafen for funktionen $f(x) = e^{-(x+1)^2}$ er størst og mindst. Hvad er den største og mindste tangenthældning. (Hint: Bemærk at

$$f''(x) = e^{-(x+1)^2}(4x^2 + 8x + 2),$$

samt at $e^{-(x+1)^2} > 0$ for alle $x \in \mathbf{R}$.)

(Hint: I de følgende tre opgaver er det værd at huske at: $\sin(2x) = \cos(x) \cdot \sin(x)$)

11. Et rektangel er indskrevet i enhedscirklen som vist i GeoGebra. Bestem sidelængderne så rektanglet får størst muligt areal. (Hint: Beskriv arealet af rektanglet ud fra punktet P.)

12. En sekskant er indskrevet i enhedscirklen som vist i GeoGebra. Bestem det størst mulige areal af sekskanten. (Hint: Beskriv arealet af sekskanten ud fra punktet P.)

13. En trekant er indskrevet i enhedscirklen som vist i GeoGebra. Bestem det størst mulige areal af trekanten. (Hint: Beskriv arealet af trekanten ud fra punktet P.)

14. Et rektangel er placeret i et koordinatsystem således at det har et hjørnepunkt i origo, et på den positive del af y-aksen, et på den positive del af x-asksen. Det sidste hjørnepunkt er placeret på linjen $y = -3x + 48$. Bestem sidelængderne på rektanglet som giver det størst mulige areal. Bestem også det maksimale areal af rektanglen.

15. Et rektangel er placeret i et koordinatsystem således at det har et hjørnepunkt i origo, et på den positive del af y-aksen, et på den positive del af x-asksen. Det sidste hjørnepunkt er placeret på grafen for funktionen $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Bestem sidelængderne på rektanglet som giver det størst mulige areal når $x \in [0, \pi]$. Bestem også det maksimale areal af rektanglen.

16. Lad $f(x) = x^2 + 4 - 4x$. I intervallet $]-2, 2[$ danner tangenten til f samt x-aksen og y-aksen en retvinklet trekant. Bestem ligningen for den tangent der giver det størst mulige areal af trekanten. Bestem også arealet af denne trekant. Hvad er det mindst mulige areal areal af trekanten i det givne interval.

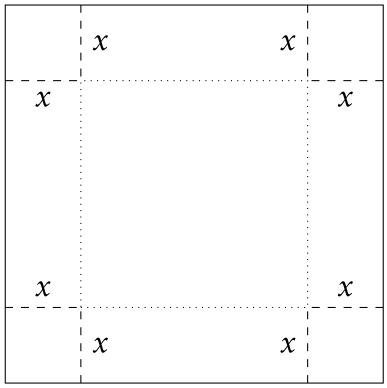
17. En kvadratisk plade med sidelængde 1 skæres som vist på Figur 2 og foldes efterfølgende til en kasse uden top. Bestem x så kassen rumfang bliver størst muligt.

18. I denne opgave betragtes 3 plader af typen som i foregående opgave, se evt. Figur 2. De afskårne kvadrater laves til to terninger. Bestem x således de tre kasser uden låg og de to terninger får størst mulig fælles rumfang.

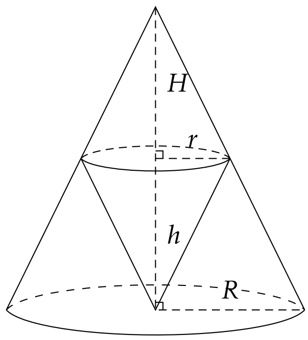
19. Bestem den største og mindste værdi som funktionen $g(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$ antager intervallet

    (a) $[-2, \frac{3}{2}]$,

    (b) $[-\frac{3}{2}, 1]$.



Figur 2: Opgave 17



Figur 3: Opgave 20

20. I Figur 3 ses en kegle med højde H og radius R. Inden i denne kegle er en mindre kegle med højde h og radius r placeret på hovedet. Bestem h og r så rumfanget af den indre kegle bliver størst muligt. Bestem efterfølgende det maksimale rumfang af den lille kegle. (Hint: Rumfanget af en kegle med grundfladeareal G og højde h er $V = \frac{1}{3}Gh$. Brug at vinklen mellem grundfladen og siden af den store kegle er den samme som vinklen mellem grundfladen i den lille kegle og siden af den store kegle.)