14. Kursusgang: Differentialregning 2

Sidste gang betragtede vi, hvordan differentiation af to funktioner lagt sammen eller en konstant gange en funktion udføres. Denne gang vil vi studere, hvordan differentiation af to funktioner, der er ganget sammen eller divideret med hinanden udføres.

Hvis vi har to funktioner f og g, der begge afhænger af x, så husker vi at deres produkt (de to funktioner ganget sammen) og kvotient (de to funktioner divideret) er givet på følgende måde

$$(fg)(x) = f(x) \cdot g(x) \qquad \text{og} \qquad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

hvor kvotienten kun giver mening, hvis $g(x) \neq 0$.

Eksempler på produkter og kvotienter af funktioner er

$$f_1(x) = xe^x, \quad f_2(x) = \frac{1}{x} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{x}, \quad f_3(x) = \sin x \cdot \ln(x), \quad f_4(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad f_5(x) = \sqrt{x} \cdot x.$$

Bemærk, at det sidste eksempel er et produkt af to funktioner, der begge afhænger af x, men hvis vi omskriver kvadratroden ved hjælp af vores potensregler fås

$$f_5(x) = \sqrt{x} \cdot x = x^{\frac{1}{2}} \cdot x = x^{\frac{3}{2}},$$

som ikke er et produkt af funktioner. Det kan derfor nogle gange være nemmere, at omskrive et produkt af funktioner før differentiation.

Regneregler: Vi har følgende regneregler for at differentiere produkter og kvotienter.

1. $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
2. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, hvis $g(x) \neq 0$.

Det kan vises (som I kommer til at gøre i en senere opgaveregning) at regnereglen for at differentiere kvotienter, følger ud fra regnereglen om at differentiere produkter.

Eksempler:

1. Differentier $f_1(x) = xe^x$:

   Vi sætter $f(x) = x$ og $g(x) = e^x$ og får at $f'(x) = 1$ og $g'(x) = e^x$. Ved at indsætte det i regneregel 1. fås

   $$f_1'(x) = \frac{d}{dx}(xe^x) = 1 \cdot e^x + x \cdot e^x = e^x + xe^x = e^x(1+x).$$

2. Differentier $f_2(x) = \frac{\cos x}{x}$:

   Vi sætter $f(x) = \cos x$ og $g(x) = x$, og får at $f'(x) = -\sin x$, $g'(x) = 1$ og $(g(x))^2 = x^2$. Indsætter vi det i regneregel 2. fås

   $$f_2'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\cos x}{x}\right) = \frac{-\sin(x) \cdot x - \cos(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{-(x\sin x + \cos x)}{x^2} = -\frac{x\sin x + \cos x}{x^2}.$$

3. Differentier $f_5(x) = \sqrt{x} \cdot x$ først ud fra regneregel 1. og dernæst ved at omskrive udtrykket ved hjælp af potensregnereglerne:

   Vi gør det først ved at bruge regneregel 1. Lad $f(x) = \sqrt{x}$ og $g(x) = x$ så har vi at $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ og $g'(x) = 1$. Indsætter vi nu det i regneregel nummer 1. fås

   $$f_5'(x) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x} \cdot x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot x + \sqrt{x} \cdot 1 = \frac{x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} = \frac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt{x} = \frac{3}{2}\sqrt{x},$$

   hvor vi i den tredje lighed har brugt at $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$.

   Hvis vi omskriver $\sqrt{x} \cdot x$ ved hjælp at potensregneregler, så vi tidligere at

   $$f_5(x) = \sqrt{x} \cdot x = x^{\frac{3}{2}},$$

   hvilket giver at

   $$f_5'(x) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x} \cdot x) = \frac{d}{dx} x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}.$$