Facit til kursusgang 17: Optimering

1. Da omkredsen skal være $20cm$ har vi at
$$20 = 2x + 2y.$$
Rumfanget V for kassen er en funktion der afhænger af både x og y givet ved
$$V(x,y) = 5xy.$$
Isolerer vi y i formlen for omkredsen og indsætter i definitionen af V får vi
$$V(x) = 50x - 5x^2.$$
Dette er en parabel som åbner nedad så den vil nødvendigvis have et maksimum i toppunktet. For at finde det løser vi ligningen
$$0 = v'(x) = 50 - 10x,$$
og får $x = 5$. Det giver at det maksimale rumfang er $V(5) = 125$.

2. De lokale minima findes i punkterne $(-2, -\frac{5}{3})$ og $(1, \frac{7}{12})$ og det lokale maksimum findes i $(0,1)$.

3. Navngiv siderne i rektanglet x og y. Da er $2x + 2y = 300$, som kan omskrives til $y = 150 - x$.
Arealfunktionen er nu $A(x,y) = xy$.
hvilket med ovenstående ligning kan omskrives til $A(x) = x(150 - x)$
Denne funktion har sit maksimum ved $x = 75$.
Vi får at $x = 75$ og $y = 75$. Altså er området et kvadrat.

4. Navngiv siderne i rektanglet x og y. Da er $2x + y = 300$, som kan omskrives til $y = 300 - 2x$.
Arealfunktionen er nu $A(x,y) = xy$.
hvilket med ovenstående ligning kan omskrives til $A(x) = x(300 - 2x)$
Denne funktion har sit maksimum ved $x = 75$.
Vi får at $x = 75$ og $y = 150$.

5. Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et generelt andengradspolynomium. Ved at differentiere f får vi at
$$f'(x) = 2ax + b.$$
Dermed får at $x = -\frac{b}{2a}$ løser ligningen, hvilket giver x-koordinatet til toppunktet. Indsætter vi denne værdi i f får vi
$$f(-\frac{b}{2a}) = a(-\frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{2a} + c = -\frac{b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} = -\frac{d}{4a}.$$

6. Hvis x er bundens sidelængder og h er højden af kassen så skal disse størrelser opfylde
$$x^2h = 500.$$

Overfladearealet O er en funktion som afhænger af x og h således:

$$O(x,h) = x^2 + 4xh.$$

Bruger vi formlen for rumfanget til at isolere h og efterfølgende indsætter i O får vi at

$$O(x) = x^2 + \frac{2000}{x}.$$

Ved at løse ligningen $O'(x) = 0$ får vi at $x = 10$ er det lokale minimum for O. For at bestemme det tilhørende h har vi at

$$h = \frac{500}{10^2} = 5.$$

7. Svaret er $a = -\frac{1}{2}$ og $b = \frac{3}{2}$.

8. Svarene er:

   (a) Det er klart at det størst mulige areal er 1 og opnås når $x = 1$.

   (b) Arealet er givet ved formlen $A(x) = \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$, og løser man $A'(x) = 0$ fås at $x = \frac{1}{3}$ og det samlede areal bliver så $A(\frac{1}{3}) = \frac{1}{3}$.

EKSTRAOPGAVER:

9. Funktionen har et globalt maksimum i punktet $(0,1)$.

10. Da vi bliver bedt om at finde den største og mindste tangenthældning skal vi maksimere og minimere funktionen $f''(x)$. Vi har at

$$f'(x) = -2(x+1)e^{-(x+1)^2}$$

og fra hintet har vi at

$$f''(x) = e^{-(x+1)^2}(4x^2 + 8x + 2).$$

Da $e^{-(x+1)^2}$ er positiv får vi at

$$f''(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 8x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Med dette resultat kan vi opstille en monotonilinje for f' (se Tabel 3). Monotonilinjen viser at f' har lokalt maksimum i $-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ og lokalt minimum i $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$. Den eksponentielle faktor $e^{-(x+1)^2}$ går mod 0 hurtigere end polynomiet $-2x - 2$ går mod uendelig, hvorfor de punkter vi har fundet er globale ekstremumspunkter. Ved at indsætte i f' får vi at den maksimale og minimale hældning er $\sqrt{\frac{2}{e}}$ og $-\sqrt{\frac{2}{e}}$.

x	-2	$-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1	$-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$	0
$f''(x)$	$\frac{2}{e}$	0	-2	0	$\frac{2}{e}$
$f'(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Tabel 3: Monotonilinje for f'

11. Punktet P kan beskrives som

$$P = (\cos\theta, \sin\theta),$$

hvor θ er vinklen til P i radianer. Arealet af rektanglet kan så beskrives som

$$A(\theta) = 2\sin(\theta)2\cos(\theta) = 2\sin(2\theta).$$

Løser vi $A'(\theta) = 0$ får vi at

$$4\cos(2\theta) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \cos(2\theta) = 0.$$

Da vi kun er interesserede i $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ får vi at $\theta = \frac{\pi}{4}$. Dermed bliver sidelængderne af rektanglet alle lig $\sqrt{2}$ of det størst mulige areal er dermed 2.

12. Inddeler vi sekskanten i et rektangel som i forrige opgave og to trekanter bliver formlen for arealet

$$A(\theta) = 2\sin(\theta)2\cos(\theta) + 2\sin\theta(1-\cos(\theta)) = \sin(2\theta) + 2\sin\theta.$$

Betragter vi ligningen $A'(\theta) = 0$ for $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ ser vi at

$$\cos(2\theta) = -\cos(\theta)$$

og bruger vi at $-\cos(\theta) = \cos(\pi-\theta)$ må vi have at

$$2\theta = \pi - \theta \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \frac{\pi}{3}.$$

Dette giver et areal på $\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

13. Formlen for trekantens areal er

$$A(\theta) = \cos(\theta)(1+\sin(\theta)) = \cos(\theta) + \frac{1}{2}\sin(2\theta),$$

Vi får at

$$A'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\theta) = \cos(2\theta).$$

Bruger vi at $\sin(\theta) = \cos(\frac{\pi}{2}-\theta)$ får vi at $\theta = \frac{\pi}{6}$, hvilket giver et areal på $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

14.

$$A(x) = x\cdot(-3x+48)$$

Sidelængderne bliver $x = 8$ og $y = 24$. Arealet er 192.

15. Arealet af rektanglet er givet ved

$$A(x) = \sin(x),$$

og fra vores kursusgang om trigonometriske funktioner ved vi allerede at $\sin x$ har sit første maksimum i $\frac{\pi}{2}$. Dette giver sidelængder på $\frac{\pi}{2}$ og $\frac{2}{\pi}$ og et areal på 1.

16. I et vilkårligt punkt x_0 er ligningen for tangenten givet ved

$$y = 2(x_0 - 2)(x - x_0) + (x_0 - 2)^2.$$

Denne tangent skærer koordinatakserne i

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}x_0 + 1 \\ y &= 4 - x_0^2. \end{aligned}$$

Arealet af trekanten som funktion af x_0 er dermed givet ved

$$A(x_0) = \frac{1}{2}(\frac{1}{2}x_0 + 1)(4 - x_0^2) = -\frac{1}{4}x_0^3 - \frac{1}{2}x_0^2 + x_0 + 2.$$

Løser vi ligningen $A'(x_0) = 0$ får vi at $x_0 = \frac{2}{3}$ og $x_0 = -2$. Den første værdi ligger i vores interval og kan let vises at være et maksimum. Vi får en tangentligning givet ved

$$y = -\frac{8}{3}(x - \frac{2}{3}) + \frac{16}{9},$$

samt at det maksimale areal er $\frac{64}{27}$. Var intervallet vi betragtede lukket ville det mindste areal af trekanten være 0 og være taget i -2 og 2, men da intervallet er åbent er der ikke noget mindste areal.

17. Når kassen er foldet vil den have en højde på x og sidelængder på $1 - 2x$. Derfor er rumfanget

$$V(x) = x(1 - 2x)^2 = 4x^3 - 4x^2 + x.$$

Ved at løse $V'(x) = 0$ fås at $x = \frac{1}{2}$ og $x = \frac{1}{6}$. Ved at undersøge monotoniforholdene ses at $x = \frac{1}{6}$ er det maksimum vi søger.

18. Funktionen vi skal optimere er

$$V(x) = 3(4x^3 - 4x^2 + x) + 2x^3 = 14x^3 - 12x^2 + 3x,$$

hvor $x \in [0, \frac{1}{2}]$. Gør vi det ser vi at V har et lokalt maksimum i $x = \frac{4-\sqrt{2}}{14}$, hvor funktionsværdien er

$$\frac{10 + \sqrt{2}}{49} < \frac{12}{49} < \frac{1}{4}.$$

Ved at undersøge endepunkterne ser vi at $x = \frac{1}{2}$ er det globale maksimum for V på intervallet $[0, \frac{1}{2}]$. Dermed får man det største udbytte ved at lave to lukkede kasser.

19. De kritiske punkter for $g(x) = x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x$ er $x = -1$ og $x = \frac{1}{2}$.

  (a) Vi skal undersøge g i de kritiske punkter som ligger i $[-2, \frac{3}{2}]$, samt intervalendepunkterne. Det giver at vi finder et globalt maksimum i $x = \frac{3}{2}$ og et globalt minimum i $x = -2$. Yderligere har vi at $g(\frac{3}{2}) = \frac{45}{16}$ og at $g(-2) = -2$.

  (b) Vi skal undersøge g i de kritiske punkter som ligger i $[-\frac{3}{2}, 1]$, samt intervalendepunkterne. Det giver at vi finder et globalt maksimum i $x = -1$ og et globalt minimum i $x = \frac{1}{2}$. Yderligere har vi at $g(-1) = \frac{5}{4}$ og at $g(\frac{1}{2}) = -\frac{7}{16}$.

20. Hvis θ betegner vinklen nævnt i hintet får vi at

$$\frac{H}{R} = \tan\theta = \frac{H-h}{r}.$$

Isolerer vi for h får vi at

$$h = H(1 - \frac{r}{R}),$$

hvilket betyder at rumfanget af den lille kegle er

$$V(r) = \frac{\pi}{3} r^2 H(1 - \frac{r}{R}).$$

Ved at differentiere V og løse ligningen $V'(r) = 0$, ser vi at

$$V'(r) = \frac{2}{3}\pi H r - \pi r^2 \frac{H}{R},$$

og at

$$\frac{2}{3}\pi H r - \pi r^2 \frac{H}{R} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3} = r\frac{1}{R} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{3}R = r.$$

Man kan vise at dette er det maksimum vi søger. Hvis vi sætter r ind i formlen for h får vi at

$$h = \frac{1}{3}H.$$

Det maksimale rumfang af den lille kegle bliver dermed

$$V = \frac{\pi}{3}\frac{4}{27}R^2 H.$$

hvilket er $\frac{4}{27}$ af rumfanget af den store kegle.