Facit til kursusgang 29: Differentialligninger 3

1. Svarene er:

$$y(x) = ce^{-\frac{x^2}{2}}, \qquad y(x) = ce^{\frac{x^3}{3}}, \qquad y(x) = ce^{x}.$$

2. Svarene er:

$$y(x) = ce^{x^2}, \qquad y(x) = ce^{-x^3}, \qquad y(x) = ce^{\frac{\pi}{2}x^2}.$$

3. Svarene er:

$$y(x) = -e^{-3x^2}, \qquad y(x) = -e^{-\frac{1}{3}x^2}.$$

4. Løsningen er $A(t) = 3e^{-4t}$. Halveringstiden er $\frac{\ln(2)}{4}$.

5. Lad $p(x)$ være en funktion med stamfunktion $P(x)$. Brug samme metode som i opgave 13 fra 27. kursusgang til at finde den fuldstændige løsning til

$$y' + p(x)y = 0.$$

Omskriver vi differentialligningen fås

$$y' + p(x)y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y' = -p(x)y \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y'}{y} = -p(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln(y) = -p(x).$$

Integrerer vi begge sider og isolerer for y fås

$$\ln(y) = -P(x) + c \quad \Leftrightarrow \quad y = e^{c}e^{-P(x)} = Ce^{-P(x)}$$

hvor $C = e^{c}$.

6. Ved at reducere fås

$$y' = (x-2)y,$$

hvilket har løsningen

$$y(x) = ce^{\frac{1}{2}x^2 - 2x}.$$

7. Løsningen er $y(x) = ce^{\ln(x)} = cx$.

8. Løsningen er $y(x) = ce^{x\ln(x) - x}$.

9. Svarene er:

$$y(x) = ce^{-x^3}, \qquad y(x) = ce^{-x^2}, \qquad y(x) = \frac{c}{x}.$$

EKSTRAOPGAVER:

10. Vi har at

$$y_1'(x) = 20(e^x + 25e^{5x}), \quad \text{og} \quad y_2'(x) = 10(-6e^x + 50e^{5x}).$$

Yderligere gælder at

$$\begin{aligned} 4y_1(x) + y_2(x) &= 20e^x + 500e^{5x}, \\ 3y_1(x) + 2y_2(x) &= -60e^x + 500e^{5x}, \end{aligned}$$

hvilket viser at y_1 og y_2 løser differentialligningerne. Derudover ses det nemt at $y_1(0) = 120$ og $y_2(0) = 40$.

11. Svarene er:

(a) Substituerer vi $u = y'$ får vi ligningen

$$u' + \frac{k}{x}u = 0,$$

som har løsningen

$$u = ce^{-k\ln(x)} = \frac{c}{x^k}.$$

Substituerer vi tilbage får vi at

$$y'(x) = \frac{c}{x^k}. \tag{1}$$

(b) Ved at integrere begge sider får vi

$$y(x) = \begin{cases} c\ln(x) + C, & \text{når } k = 1 \\ \frac{c}{-k+1}x^{-k+1} + C, & \text{når } k \neq 1. \end{cases}$$

(c) Svaret er $y(x) = 2\ln(x) + 1$.