

28. Kursusgang: Differentialligninger 2

Sidste gang studerede vi fuldstændige løsninger til differentialligninger. Vi så, at der var uendeligt mange løsninger til en differentialligning. Vi kaldte hver af disse løsninger for en partikulær løsning. Denne gang vil vi studere differentialligninger, der opfylder en såkaldt begyndelsesbetingelse.

Hvis du bliver bedt om at finde en funktion $f(x)$ og den eneste ledetråd du får, er at $f(x)$ er en partikulær løsning til differentialligningen

$$\frac{d}{dx}f(x) = 5f(x),$$

kan du så finde $f(x)$? Fra sidste gang, ved vi at den fuldstændige løsning til differentialligningen er på formen

$$f(x) = ce^{5x},$$

men vi har ingen mulighed for at finde ud af, hvad c er. Hvis du derudover får at vide, at funktionen opfylder at $f(0) = 10$, så kan man bestemme hvad c er. Hvis vi indsætter, at $f(0) = 10$ i den fuldstændige løsning, får vi at

$$10 = f(0) = ce^{5 \cdot 0} = ce^0 = c,$$

hvilket betyder, at den partikulære løsning jeg tænkte på må være

$$f(x) = 10e^{5x}.$$

Betingelsen $f(0) = 10$ kaldes for en begyndelsesbetingelse og noteres generelt ved

$$f(t_0) = y_0.$$

Det betyder, at hvis vi har en differentialligning, hvor løsningen skal opfylde at den går igennem punktet (t_0, y_0) , så findes der præcis én løsning. Det at løse en differentialligning med begyndelsesbetingelse kaldes ofte for et begyndelsesværdiproblem.

Eksempler:

1. Løs begyndelsesværdiproblemet $f'(x) = 5$ med $f(2) = 4$:

Vi finder først den fuldstændige løsning til differentialligningen $f'(x) = 5$. Ved at benytte tabellen fra sidste gang ser vi at differentialligningen er på formen $f'(x) = k$ og har dermed den fuldstændige løsning

$$f(x) = 5x + c.$$

Vi indsætter nu vores begyndelsesbetingelse og bestemmer c

$$4 = f(2) = 5 \cdot 2 + c = 10 + c \Leftrightarrow c = -6.$$

Det betyder, at den løsning vi leder efter er $f(x) = 5x - 6$.

2. Vis, at $f(x) = ce^{x^2}$ er en løsning til differentialligningen $f'(x) = 2xf(x)$ og bestem den partikulære løsning, der opfylder at $f(0) = 3$:

Vi viser, at $f(x) = ce^{x^2}$ er en løsning ved at gøre prøve. Vi har, at venstresiden i vores differentialligning giver

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(ce^{x^2}) = 2xce^{x^2},$$

hvor vi har brugt kædereglen til at differentiere. Derudover har vi, at højresiden er

$$2xf(x) = 2xce^{x^2}.$$

Da venstresiden er lig højresiden, er $f(x) = ce^{x^2}$ en løsning. Vi bestemmer nu c ved at benytte begyndelsesbetingelsen

$$3 = f(0) = ce^{0^2} = ce^0 = c.$$

Dermed er den partikulære løsning vi leder efter $f(x) = 3e^{x^2}$.

Tangentligningen: Vi har tidligere studeret tangentens ligning

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Hvis vi er givet en differentialligning, f.eks.

$$f'(x) = x^2 - f(x),$$

og vi gerne vil bestemme tangentens ligning for en løsning f i punktet $(3, 7)$, så har vi at $x_0 = 3$ og $f(x_0) = 7$. Det betyder, at vi kun mangler at bestemme $f'(x_0)$. Hvis vi indsætter $x_0 = 3$ i vores differentialligning, får vi at

$$f'(3) = 3^2 - f(3) = 9 - 7 = 2.$$

Hvilket giver at tangentens ligning i punktet $(3, 7)$ er givet ved

$$y = 2(x - 3) + 7 = 2x - 6 + 7 = 2x + 1 \Leftrightarrow y = 2x + 1$$

Bemærk, at det ikke er nødvendigt at løse differentialligningen for at finde tangentens ligning til en løsning gennem et givet punkt, såfremt du kender x_0 og $f(x_0)$.

Eksempel:

1. Lad f være en funktion der løser differentialligningen $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{2f(x) - 1}{x}$ med begyndelsesbetingelse $f(1) = 3$. Bestem tangentens ligning til f i punktet $(1, 3)$:

Vi har at $x_0 = 1$ og $f(x_0) = 3$. Vi finder dernæst $f'(x_0)$ ved

$$f'(x_0) = \frac{2f(1) - 1}{1} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{1} = \frac{5}{1} = 5.$$

Dermed har vi, at tangentens ligning i punktet $(1, 3)$ er givet ved

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 5(x - 1) + 3 = 5x - 5 + 3 = 5x - 2 \Leftrightarrow y = 5x - 2$$