Brøker

Brøker er tal på formen

$$\frac{a}{b},$$

hvor a, b er tal samt $b \neq 0$. a er *tælleren* og b er *nævneren*.

Regneregler

Der gælder

$$\frac{a}{c} \pm \frac{b}{c} = \frac{a \pm b}{c}, \quad \frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc},$$

$$a\frac{b}{c} = \frac{ab}{c}, \quad \frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}, \quad \frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}.$$

Forkorte/Forlænge Brøker

Fælles faktorer kan forkortes:

$$\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

Potenser

Potenser er tal på formen x^a, x er *grundtallet* og a er *eksponenten*.

Regneregler

Der gælder

$$x^a x^b = x^{a+b}, \quad \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}, \quad (xy)^a = x^a y^a,$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^a = \frac{x^a}{y^a}, \quad (x^a)^b = x^{ab}, \quad x^{-a} = \frac{1}{x^a}.$$

Rødder

Hvis $x \geq 0$ og $n \in \mathbf{Z}_+$ så findes et tal $\sqrt[n]{x} > 0$ så

$$(\sqrt[n]{x})^n = x.$$

Bemærk at $\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$.

Regneregler

Der gælder

$$\sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}, \quad \sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m,$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}, \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}.$$

Kvadratsætninger

Der gælder

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$
$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Ligninger

Ligninger kan reduceres med følgende regler:

1. Man må lægge til/trække fra med det samme tal på begge sider af et lighedstegn.
2. Man må gange/dividere med det samme tal (undtagen 0) på begge sider af et lighedstegn.

Andengradsligninger

Andengradsligninger er på formen

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

Løsningerne til (1) er

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Faktorisering

Hvis $ax^2 + bx + c = 0$ har rødder r_1 og r_2 så gælder.

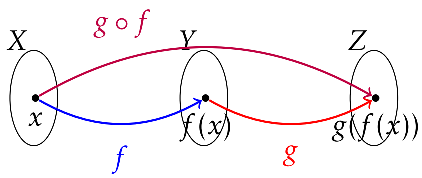
$$ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2).$$

Funktioner

En funktion $f\colon X \to Y$ tildeler alle $x \in X$ *præcis ét* element $f(x) \in Y$.

Sammensatte funktioner

Hvis $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to Z$ defineres sammensætningen $g \circ f\colon X \to Z$ ved $(g \circ f)(x) = g(f(x))$. f er den *indre funktion*, g er den *ydre funktion*



Inverse funktioner

To funktioner $f\colon X \to Y$ og $g\colon Y \to X$ er hinandens *inverse* hvis

$$f(g(y)) = y, \quad \text{og} \quad g(f(x)) = x$$

for alle x i X og y i Y.

Polynomier

Et førstegradspolynomium har forskrift:

$$f(x) = ax + b.$$

Et andengradspolynomium har forskrift:

$$f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Logaritmer og eksponentialfunktioner

Logaritmen med grundtal a, $\log_a\colon]0, \infty[\to \mathbf{R}$ er invers til eksponentialfunktionen $f_a(x) = a^x$ ($a > 0$, $a \neq 1$). Der gælder at

$$\log_a(a^x) = x \quad \text{og} \quad a^{\log_a(y)} = y$$

og vi har

$$\ln x = \log_e x, \qquad \log x = \log_{10} x$$

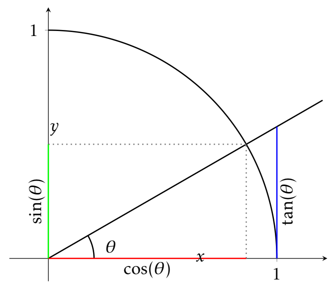
Regneregler

Der gælder

$$\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y),$$
$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y),$$
$$\log_a(x^r) = r\log_a(x).$$

Trigonometriske funktioner

De trigonometriske funktioner er defineret ud fra enhedscirklen:



Der gælder at $\tan(\theta) = \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)}$ samt

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-

Differentialregning

Den afledede af f skrives som $f' = \frac{d}{dx}f = \frac{df}{dx}$.

Regneregler

Der gælder at

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
x^n	nx^{n-1}
e^x	e^x
e^{cx}	ce^{cx}
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1 + \tan^2(x)$

Generelle regneregler

Der gælder at

$$(cf)'(x) = cf'(x)$$
$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$
$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$
$$\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x).$$

Den sidste regneregel kaldes *kædereglen*.

Ubestemte integraler

En funktion f har *stamfunktion* F hvis

$$F'(x) = f(x).$$

Det ubestemte integral af f er

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k,$$

hvor $F'(x) = f(x)$ og $k \in \mathbf{R}$.

Generelle regneregler

$$\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$
$$\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$$
$$\int f(x)g(x)\,dx = f(x)G(x) - \int f'(x)G(x)\,dx$$
$$\int f(g(x))g'(x)\,dx = F(g(x)) + k.$$

Den 3. regel kaldes *delvis integration* og den sidste kaldes *integration ved substitution*.

Regneregler

Der gælder at

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
c	$cx + k$
x	$\frac{1}{2}x^2 + k$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
e^x	$e^x + k$
e^{cx}	$\frac{1}{c}e^{cx} + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln(\lvert x\rvert) + k$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\tan x$	$-\ln(\lvert\cos(x)\rvert) + k$

Integration ved substitution

Givet et integral på formen $\int f(g(x))g'(x)\,dx$ anvendes metoden:

1. Lad $u = g(x)$.
2. Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
3. Substituer $g(x)$ og dx.
4. Udregn integralet mht. u.
5. Substituer tilbage.

Besemte integraler

Det bestemte integral af f i intervallet $[a, b]$ til

$$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a),$$

hvor F er en stamfunktion til f.

Generelle regneregler

$$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x) \pm g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x)\,dx$$
$$\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx = [F(x)]_{g(a)}^{g(b)}.$$

Integration ved substitution

Givet et integral på formen $\int_a^b f(g(x))g'(x)\,dx$ anvendes metoden

1. Lad $u = g(x)$.
2. Udregn $\frac{du}{dx}$ og isoler dx.
3. Substituer $g(x)$, dx samt grænser.
4. Udregn integralet mht. u.

Differentialligninger

Løsningsformler

Differentiallign.	Fuldstændig løsn.
$f'(x) = k$	$f(x) = kx + c$
$f'(x) = h(x)$	$f(x) = \int h(x)\,dx$
$f'(x) = kf(x)$	$f(x) = ce^{kx}$
$f'(x) + af(x) = b$	$f(x) = \frac{b}{a} + ce^{-ax}$

Panserformlen

Differentialligningen

$$f'(x) + a(x)f(x) = b(x)$$

har fuldstændig løsning

$$f(x) = e^{-A(x)}\int b(x)e^{A(x)}dx + ce^{-A(x)},$$

hvor $A'(x) = a(x)$.

Vektorer i planen

En vektor $\vec{u}$ i planen skrives som $\vec{u} = [x, y]$ hvor $x, y \in \mathbf{R}$.

Regneregler

For $\vec{u} = [x_1, y_1]$, $\vec{v} = [x_2, y_2]$, $c \in \mathbf{R}$ er

$$\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \end{bmatrix}, \qquad \vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2,$$
$$c\vec{u} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix}, \quad \det(\vec{u}, \vec{v}) = x_1y_2 - x_2y_1$$

Længden af $\vec{u}$ er $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Vinklen mellem to vektorer

For vinklen θ mellem $\vec{u}$, $\vec{v}$ er

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lVert\vec{u}\rVert\lVert\vec{v}\rVert}, \quad \sin\theta = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{\lVert\vec{u}\rVert\lVert\vec{v}\rVert}$$

Yderligere gælder

1. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
2. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle $\Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$.

Vektorer i rummet

En vektor $\vec{u}$ i rummet skrives som $\vec{u} = [x, y, z]$ hvor $x, y, z \in \mathbf{R}$.

Regneregler

For $\vec{u} = [x_1, y_1, z_1]$, $\vec{v} = [x_2, y_2, z_2]$ og $c \in \mathbf{R}$ gælder

$$\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \\ z_1 \pm z_2 \end{bmatrix}, \qquad c\vec{u} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \\ cz_1 \end{bmatrix},$$
$$\vec{u}\cdot\vec{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Længden af $\vec{u}$ er $\lVert\vec{u}\rVert = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$. Krydsproduktet er givet ved

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{bmatrix} y_1z_2 - z_1y_2 \\ z_1x_2 - x_1z_2 \\ x_1y_2 - y_1x_2 \end{bmatrix}$$

Vinklen mellem to vektorer

For vinklen θ mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ gælder

$$\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\lVert\vec{u}\rVert\lVert\vec{v}\rVert}, \quad \sin\theta = \frac{\lVert\vec{u}\times\vec{v}\rVert}{\lVert\vec{u}\rVert\lVert\vec{v}\rVert}$$

Yderligere gælder

1. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale $\Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.
2. $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle $\Leftrightarrow \vec{u}\times\vec{v} = 0$.

Linjer og Planer

Planen/linjen gennem punktet med stedvektor $\vec{x_0}$ med normalvektor $\vec{n}$ beskrives ved alle vektorer $\vec{x}$ der løser ligningen

$$\vec{n}\cdot(\vec{x} - \vec{x_0}) = 0$$

En linje i rummet/planen gennem punktet med stedvektor $\vec{x_0}$ og retning $\vec{r}$ har parameterfremstilling

$$\vec{x_0} + t\vec{r}, \quad t \in \mathbf{R}.$$