Opgaver til kursusgang 20: Vektorer i rummet 1

1. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 8. \end{bmatrix}.$$

   Udregn

$$3\vec{u}, \qquad -\vec{v}, \qquad \vec{u}+\vec{v}, \qquad \vec{u}-\vec{v}, \qquad \|\vec{u}\|, \qquad \|\vec{v}\|, \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}, \qquad \vec{u}\times\vec{v}.$$

2. Er vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ -1. \end{bmatrix}$$

   ortogonale?

3. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} -3 \\ -5 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \\ t. \end{bmatrix}.$$

   Bestem værdien af t hvor $\vec{u}$ står vinkelret på $\vec{v}$.

4. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1. \end{bmatrix}.$$

   Bestem de værdier af t hvor $\vec{u}+t\vec{v}$ står vinkelret på $\vec{u}-t\vec{v}$.

5. Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1. \end{bmatrix}.$$

6. Vis at $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$.

7. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   og bestem t så parallelogrammet udspændt af $\vec{u}$ og $t\vec{v}$ har areal 3.

8. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{w} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Udregn

$$\vec{u} \times \vec{v}, \qquad \vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}), \qquad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}), \qquad \vec{v} \times \vec{u}, \qquad \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}, \qquad \vec{w} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}).$$

EKSTRAOPGAVER:

9. Vis at der også i rummet gælder at $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.
10. Vis at der også i rummet gælder at $||k\vec{u}|| = |k|||\vec{u}||$.
11. Vis at der også i rummet gælder at $||\vec{u} + \vec{v}||^2 = ||\vec{u}||^2 + ||\vec{v}||^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v})$.
12. Vis at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ står vinkelret på $\vec{u} \times \vec{v}$ for alle vektorer u og v.