Facit til kursusgang 27: Differentialligninger 1

1. Da $f'(x) = x^2$ er f en løsning til differentialligningen.

2. Da $f'(x) = 4x + 4$ og $f(x) = 2x^2 + 4x + 4$ kan disse indsættes i differentialligningen og det ses at ligningen går op, derfor er f en løsning til differentialligningen.

3. Da $f'(x) = -1 + e^x$ og $f(x) + x = -1 + e^x$ er f en løsning til differentialligningen. Funktionen g ses også at være en løsning.

4. Den fuldstændige løsning er $y(x) = c$ hvor $c \in \mathbf{R}$.

5. Ved at differentiere f ses at
$$f'(x) = 6e^{2x} = 2(3e^{2x}) = 2f(x).$$
Dermed er f en løsning til differentialligningen. Da $g'(x) = f'(x) = 2f(x) = 2g(x) - 4$ er det ikke en løsning.

6. Da
$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x + e + 1},$$
og
$$e^{x-f(x)} = \frac{e^x}{e^{f(x)}} = \frac{e^x}{e^x + e + 1}$$
er f en løsning.

7. Vi har at
$$f'(x) - 2f(x) = 12e^{3x} - 2e2x - 2(4e^{3x} - e^{2x}) = 4e^{3x}$$
hvilket viser at f ikke er en løsning.

8. Brug at $y' = a$ og $y = ax + b$ og indsæt det i differentialligningen. Svaret er $a = -2$ og $b = 1$.

EKSTRAOPGAVER:

9. Da $g(x) = F(x) - F(0)$ får vi at
$$g'(x) = F'(x) = f(x).$$

Hvis $\tilde{F}(x) = F(x) + c$ for et $c \in \mathbf{R}$ så vil

$$g(x) = \tilde{F}(x) + c - (\tilde{F}(0) + c) = \tilde{F}(x) + \tilde{F}(0).$$

Differentierer vi fås

$$g'(x) = \tilde{F}'(x) = f(x).$$

10. Vi har at

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{2e^x}{4e^{2x}} = \frac{1}{2}e^{x-2x} = \frac{1}{2}e^{-x}$$

11. Da

$$\frac{d}{dx}\sin x = \cos x \quad \text{og} \quad \frac{d^2}{dx^2}\sin x = -\sin x$$

har vi at

$$\left(\frac{d^2}{dx^2}\sin x\right)^2 + \left(\frac{d}{dx}\sin x\right)^2 = \sin^2(x) + \cos^2(x) = 1.$$

12. Vi har at

$$f'(x) = ae^{-x}(1-x), \quad \text{og} \quad f''(x) = ae^{-x}(x-2),$$

hvorfor

$$f''(x) - f(x) = ae^{-x}(x-2) - axe^{-x} = -2ae^{-x}.$$

For at løse ligningen

$$y'' - y = e^{-x}$$

ses at $a = -\frac{1}{2}$.

13. Ved at dividere med y på begge sider af differentialligningen $y' = k \cdot y$ får vi at

$$\frac{y'}{y} = k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d}{dx}\ln(y) = k.$$

Integrerer vi begge sider får vi at

$$\ln(y) = kx + c \quad \Leftrightarrow \quad y = e^c e^{kx} = Ce^{kx},$$

hvor $C = e^c$.