2. Kursusgang: Kvadratsætningerne

Hvis vi har et udtryk, som vi gerne vil reducere, møder vi ofte noget på formen $(a+b)^2$. For at komme videre i vores udregning vil vi derfor gerne kunne omskrive sådanne udtryk, så de bliver nemmere at reducere. Til at gøre dette introduceres kvadratsætningerne.

Vi husker, at når to parenteser ganges sammen, så benyttes følgende formel

$$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd,$$

som vi får ved først at gange a ind på begge elementer i den anden parentes og dernæst gange b ind på de to elementer.

Hvis vi bruger denne regneregel fås:

$$\begin{aligned}
(a+b)^2 &= (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + b^2 + 2ab \\
(a-b)^2 &= (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + (-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab \\
(a+b)(a-b) &= a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2.
\end{aligned}$$

Bemærk her, at $(-b)^2 \neq -b^2$ medmindre $b = 0$, da $(-b)^2 = (-b)\cdot(-b) = (-1)\cdot b\cdot(-1)\cdot b = (-1)^2\cdot b^2 = b^2$ og $-b^2 = (-1)\cdot b^2$.

Det giver de tre kvadratsætninger, som kort kan skrives:

1. $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$
2. $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab.$
3. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$

Eksempler:

1. Reducer $(x+y)^2 + (x-y)^2 - x^2 - y^2$:

$$\begin{aligned}
(x+y)^2 + (x-y)^2 - x^2 - y^2 &= x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 - 2xy - x^2 - y^2 \\
&= x^2 + y^2.
\end{aligned}$$

2. Reducer $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b}$:

   Ved at benytte brøkregnereglerne fra sidste kursusgang fås

$$\begin{aligned}
\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a-b} &= \frac{a-b}{(a+b)(a-b)} + \frac{a+b}{(a+b)(a-b)} \\
&= \frac{a-b+a+b}{(a+b)(a-b)} \\
&= \frac{2a}{a^2-b^2}.
\end{aligned}$$

3. Reducer $\frac{2x^2+2-4x}{2x^2-2}$:

   Det ses ved hjælp af vores kvadratsætninger, at

$$\begin{aligned}
2x^2 + 2 - 4x &= 2(x^2 + 1 - 2x) = 2(x-1)^2 \\
2x^2 - 2 &= 2(x^2 - 1) = 2(x-1)(x+1).
\end{aligned}$$

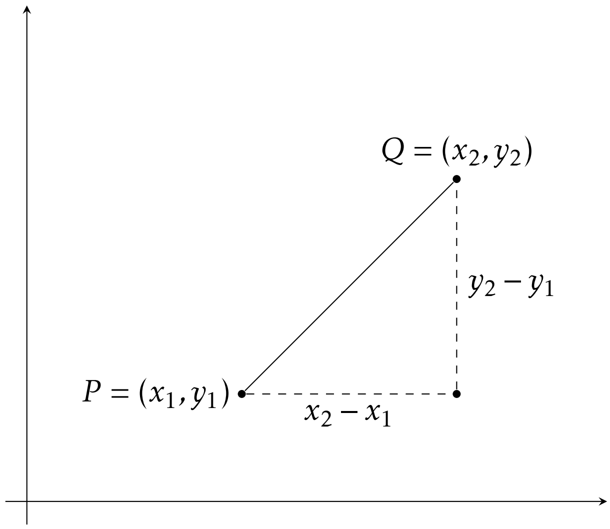
Hvis dette indsættes og reduceres, fås

$$\frac{2x^2+2-4x}{2x^2-2} = \frac{2(x-1)^2}{2(x-1)(x+1)} = \frac{x-1}{x+1}.$$

Afstandsformlen: Vi husker Pythagoras Sætning, der siger at for en retvinklet trekant med sidelængderne a, b, c hvor c er hypotenusen, gælder der:

$$a^2 + b^2 = c^2.$$

Ved at benytte Pythagoras Sætning fås at afstanden c mellem to punkter P og Q i et koordinatsystem som i Figur 1 er givet ved



Figur 1: Afstanden mellem P og Q.

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = c^2.$$

Cirklens ligning: Ved at bruge afstandsformlen kan nu opstilles en ligning for en cirkel med centrum i punktet (a, b) og med radius r, som i Figur 2. Alle punkterne der ligger på denne cirkel, vil opfylde at deres afstand til punktet (a, b) er r. Dette kan ved hjælp af afstandsformlen skrives som en ligning givet ved

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2,$$

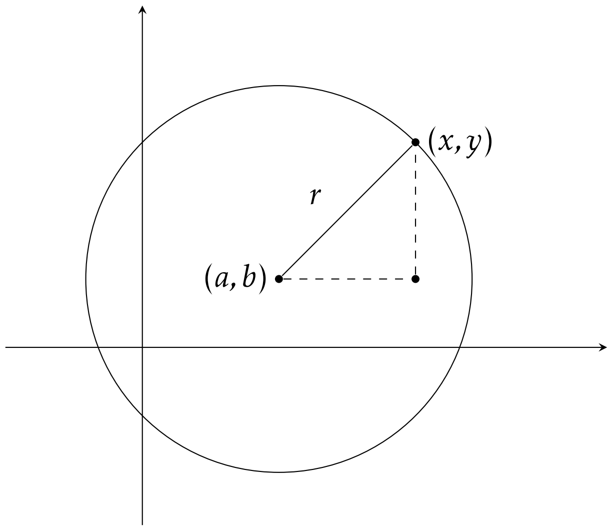
hvor (x, y) er punkter på cirklen. Denne ligning kaldes for *cirklens ligning*.

Eksempler:

1. Find cirklens ligning for en cirkel med centrum i $(2, 3)$ med radius $r = 4$:

   Vi indsætter $(2, 3)$ og $r = 4$ i cirklens ligning og reducerer

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16.$$



Figur 2: Cirklens ligning.

2. Find centrum og radius for en cirkel med ligning $x^2 - 4x + y^2 - 2y = -4$:

   For a omskrive ligningen til noget på samme form som cirklens ligning, bruges kvadratsætningerne den modsatte vej af, hvad vi har gjort indtil nu. Hermed fås

$$x^2 + 4 - 4x = (x - 2)^2$$
$$y^2 + 1 - 2y = (y - 1)^2.$$

   Dermed kan der lægges 5 til på begge sider af den givne ligning. Den omskrives til

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + y^2 - 2y = -4 &\Leftrightarrow x^2 - 4x + y^2 - 2y + 5 = 1 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 4 - 4x) + (y^2 + 1 - 2y) = 1 \\ &\Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 1^2, \end{aligned}$$

   hvilket viser, at cirklen har centrum i punktet $(2, 1)$ og radius $r = 1$.

3. Find centrum og radius for en cirkel med ligning $x^2 + 4x + y^2 - 4y = 1$:

   Igen benyttes kvadratsætningerne den modsatte vej, og der fås at

$$x^2 + 4 + 4x = (x + 2)^2$$
$$y^2 + 4 - 4y = (y - 2)^2.$$

   Dermed kan der lægges 8 til på begge sider af ligningen, og der fås

$$\begin{aligned} x^2 + 4x + y^2 - 4y = 1 &\Leftrightarrow x^2 + 4x + y^2 - 4y + 8 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x^2 + 4 + 4x) + (y^2 + 4 - 4y) = 9 \\ &\Leftrightarrow (x + 2)^2 + (y - 2)^2 = 9 \\ &\Leftrightarrow (x - (-2))^2 + (y - 2)^2 = 3^2, \end{aligned}$$

hvilket viser at cirklen har centrum i $(-2, 2)$ og radius 3.