Opgaver til kursusgang 12: Grænseværdi og kontinuitet

1. Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved
$$f(x) = \begin{cases} 2x+3, & \text{hvis } x \neq 1 \\ 6, & \text{ellers.} \end{cases}$$
Bestem $\lim_{x\to 1} f(x)$ og $f(1)$. Brug dette til at afgør om f er kontinuert.

2. Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2-1, & \text{hvis } x \neq 2 \\ 7, & \text{ellers.} \end{cases}$$
Bestem $\lim_{x\to 2} f(x)$ og afgør om f er kontinuert.

3. Lad $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{7}{6}, & \text{hvis } x < -\frac{1}{2} \\ -\frac{2}{3}x^2 - \frac{1}{3}x + 1, & \text{hvis } x \geq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$
Bestem grænsen $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x)$ såfremt den er veldefineret.

4. Lad funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved
$$f(x) = \begin{cases} x^3+x-1, & \text{hvis } x < 1 \\ 4x^4-2x^2+1, & \text{hvis } x > 1 \\ 2, & \text{ellers.} \end{cases}$$
Hvad er $f(1)$? Er f kontinuert i 1.

5. Bestem a og b så funktionen
$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{hvis } x < 1 \\ 5, & \text{hvis } x = 1 \\ bx^2+x+1, & \text{hvis } x > 1 \end{cases}$$
er kontinuert i 1.

6. Funktionen $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ givet ved
$$f(x) = \begin{cases} 2x^2+x+1, & \text{hvis } x \in [-a,a] \\ x+2, & \text{ellers} \end{cases}$$
er plottet i GeoGebra.
   (a) Bestem $a > 0$ så f er kontinuert.
   (b) Er f kontinuert når $a = 0$?

7. Bestem grænserne

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x}, \qquad \lim_{x\to -2} (x^2 - x)e^{x^2}, \qquad \lim_{x\to -1} x\ln(x+3).$$

8. Bestem de følgende grænseværdier. (Hint: Hvis nævneren går mod 0, er det ofte nødvendigt at faktorisere og forkorte brøken først.)

$$\lim_{x\to 3} x^2, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{1}{x-1}, \qquad \lim_{x\to -2} \frac{x^2-4}{x+2}, \qquad \lim_{x\to 0} \frac{-2\frac{1}{x^3} - 4\frac{1}{x^2} + 12}{3\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x}}$$

9. Bestem grænserne

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2+4-4x}{x^2-4}, \qquad \lim_{x\to -5} \frac{(x-1)(2x^2+14x+20)}{x^2+4x-5}$$

EKSTRAOPGAVER:

10. Lad $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{hvis } x \neq 0 \\ 0, & \text{ellers.} \end{cases}$$

Bestem $f(0)$, $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ og $\lim_{x\to 0^-} f(x)$. I hvilke punkter er f kontinuert?

11. Lad f være givet som i Opgave 10 og lad $g(x) = -f(x)$.

    (a) Bestem $(f+g)(0)$, $\lim_{x\to 0^+}(f+g)(x)$ og $\lim_{x\to 0^-}(f+g)(x)$. I hvilke punkter er $(f+g)$ kontinuert?

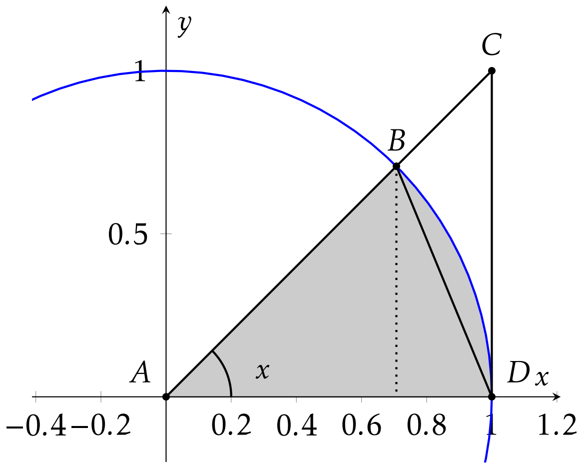
    (b) Bestem $(fg)(0)$, $\lim_{x\to 0^+}(fg)(x)$ og $\lim_{x\to 0^-}(fg)(x)$. I hvilke punkter er (fg) kontinuert?

12. I denne opgave bestemmes grænseværdien for funktionen $\frac{\sin x}{x}$ når x går mod nul.

    (a) Figur 1 viser vinklen $x \in [0, \frac{\pi}{2}[$ indtegnet i enhedscirklen. Brug figuren til at vise uligheden

$$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x.$$

    (Hint: Sammenlign arealet af det grå cirkeludsnit med arealet af ΔACD og ΔABD).



Figur 1: Opgave 12

(b) Omskriv uligheden fra (a) til

$$\cos(x) \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1.$$

(c) Brug at $\lim_{x\to 0} \cos(x) = 1$ samt uligheden i (b) til at argumentere for at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

13. Vis at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

(Hint: Bruge Opgave 12, identiteten

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{\sin^2 x}{x(1 + \cos x)} = \frac{\sin x}{x} \frac{\sin x}{1 + \cos x}$$

og produktreglen for grænser.)

14. Brug Opgave 12 del (b) til at vise at

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} \leq \frac{\sin(x) - x}{x^2} \leq 0.$$

Argumenter vha. Opgave 13 for at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x) - x}{x^2} = 0.$$

15. Vis at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{1}{2}.$$

(Hint: Bruge Opgave 12, identiteten

$$\frac{\cos(x) - 1}{x^2} = \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \frac{1}{1 + \cos x}$$

og produktreglen for grænser.)