

Facit til kursusgang 23: Ubestemte integraler 2

1. Svarene er:

$$(x-1)e^x + c, \quad \frac{1}{2}x^2 e^{2x} - \frac{1}{2}x e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

2. Svarene er:

$$\sin(x) - (1+x)\cos(x) + c, \quad (2x-3)e^x + c.$$

3.

$$\begin{aligned} F(x) &= \int (9x-3)e^{3x} dx = (9x-3)\frac{1}{3}e^{3x} - \int 9\frac{1}{3}e^{3x} dx + c \\ &= (3x-1)e^{3x} - 9\frac{1}{9}e^{3x} + c \\ &= (3x-1)e^{3x} - e^{3x} + c \\ &= (3x-2)e^{3x} + c \end{aligned}$$

Svaret er

$$F(x) = (3x-2)e^{3x} + 10$$

4. Vi har at

$$\int \ln x dx = x \ln(x) - \int \frac{x}{x} dx = x \ln(x) - x + c.$$

5. Vi har at

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \ln(x)^2 - \int \frac{\ln x}{x} dx.$$

Isolerer vi for $\int \frac{\ln x}{x} dx$ får vi at

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

hvor vi har lagt c til for at få samtlige stamfunktioner.

6. Anvender vi formelen for delvis integration to gange fås

$$\begin{aligned} \int e^x \sin(x) dx &= e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x) dx \\ &= e^x \sin(x) - e^x \cos(x) - \int e^x \sin(x) dx. \end{aligned}$$

Isolerer vi $\int e^x \sin(x) dx$ får vi at

$$\int e^x \sin(x) dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + c,$$

hvor konstanten er lagt til for at få alle stamfunktioner.

7. Vi har at

$$\int x^2 \ln x dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

EKSTRAOPGAVER:

8. Lad f og g være vilkårlige funktioner. Produktreglen giver at

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Isolerer vi $f'(x)g(x)$ og integrerer begge sider får vi

$$\int f'(x)g(x) dx = \int (fg)'(x) dx - \int f(x)g'(x) dx.$$

Da stamfunktionen til $(fg)'(x)$ er $(fg)(x)$ får vi at

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

og hvis vi erstatter f med en stamfunktion F får vi at

$$\int f(x)g(x) dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x) dx.$$

9. Vi får at

$$\begin{aligned} \int \ln^2(x) dx &= \ln(x)(x \ln(x) - x) - \int \ln(x) - 1 dx \\ &= x \ln^2(x) - x \ln(x) - (x \ln(x) - x - x) + c \\ &= x \ln^2(x) - 2x \ln(x) + 2x + c. \end{aligned}$$

10. Svarene er:

$$\frac{1}{4}x^2(2\ln(x) - 1) + c, \quad \frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2 - 6x + 2) + c, \quad e^x \ln(x) + c$$