4. Kursusgang: Rødder

Vi har tidligere betragtet potenser, og ligesom at der for plus og gange findes regneoperationer, der gør det modsatte, henholdsvis minus og divider, er der en invers (modsat) regneoperation af potenser, som kaldes rødder.

Når vi snakker om rødder, tænker vi på tal på formen

$$\text{rod} = \sqrt[\text{rodeksponent}]{\text{grundtal}}.$$

Vi siger, at y er den n'te rod af x, hvis vi kan opløfte y i n og få x, eller sagt på en anden måde

$$y = \sqrt[n]{x} \quad \text{hvis} \quad y^n = x,$$

hvor x kan være alle tal og n kan være alle positive heltal. Bemærk, at dette betyder, at hvis et tal opløftes i n, og dernæst tager den n'te rod (eller i modsatte rækkefølge), så vil de to regneoperationer gå ud med hinanden. Vi vil kun betragte rødder med negativ grundtal, hvis n er ulige.

Kvadratrødderne af a er de b, der opfylder at $b^2 = a$. Det betyder at hvis b er en kvadratrod, så vil $-b$ også være en kvadratrod da $(-b)^2 = b^2 = a$. Hvis der bliver spurgt, om at finde kvadratroden af et tal, vil det medmindre der specifikt er angivet andet, altid nøjes med at give den positive værdi.

Hvis $n = 2$ vil vi ofte bare skrive $\sqrt{a}$.

Eksempler:

1. Udregn $\sqrt{81}$:

$$\text{Da} \quad 81 = 9^2 \quad \text{så er} \quad \sqrt{81} = 9.$$

2. Udregn $\sqrt[3]{-8}$:

$$\text{Da} \quad -8 = (-2)^3 \quad \text{så er} \quad \sqrt[3]{-8} = -2.$$

3. Udregn $\sqrt[4]{81}$:

$$\text{Da} \quad 81 = 3^4 \quad \text{så er} \quad \sqrt[4]{81} = 3.$$

Regneregler: Vi har følgende regneregler for rødder og igen er det utrolig vigtigt at forstå at bruge disse, da de vil blive brugt igen og igen senere i kurset.

1. Vi har følgende sammenhæng mellem potenser og rødder:

$$\sqrt[n]{x} = x^{1/n}.$$

2. Mere generelt har vi:

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m$$

3. At gange to n'te rødder sammen er det samme, som at tage den n'te rod af de to grundtal ganget sammen:

$$\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}.$$

4. At dividere to n'te rødder med hinanden er det samme, som at dividere de to grundtal og så tage den n'te rod:

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}.$$

Eksempler:

1. Udregn $\sqrt[3]{5^6}$:

$$\sqrt[3]{5^6} = 5^{\frac{6}{3}} = 5^2 = 25.$$

2. Udregn $\sqrt{144}$:

$$\sqrt{144} = \sqrt{9 \cdot 16} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{16} = 3 \cdot 4 = 12.$$

3. Udregn $\sqrt{\frac{144}{81}}$:

$$\sqrt{\frac{144}{81}} = \frac{\sqrt{144}}{\sqrt{81}} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}.$$

4. Reducer $\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{ab})^6}{b^3}}$:

$$\sqrt[3]{\frac{(\sqrt{ab})^6}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{(\sqrt{ab})^{2\cdot 3}}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{\left((\sqrt{ab})^2\right)^3}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{(ab)^3}{b^3}} = \sqrt[3]{\frac{a^3 b^3}{b^3}} = \sqrt[3]{a^3} = a.$$