Facit til kursusgang 11: Funktioner 5 (trigonometriske funktioner)

1. Svarene er:

$$\frac{\pi}{2}, \qquad \frac{\pi}{12}, \qquad \frac{5\pi}{6}, \qquad \frac{\pi}{4}.$$

2. Svarene er:

$$60°, \qquad 315°, \qquad 75°.$$

3. Svarene er:
   (a) $\sin(0) = 0$ og $\cos(0) = 1$.
   (b) $\sin(\frac{\pi}{2}) = 1$ og $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$.
   (c) $\sin(\pi) = 0$ og $\cos(\pi) = -1$.
   (d) $\sin(\frac{3\pi}{2}) = -1$ og $\cos(\frac{3\pi}{2}) = 0$.
   (e) $\sin(2\pi) = 0$ og $\cos(2\pi) = 1$.

4. Svarene er:
   (a) $\frac{\pi}{6}$ og $\frac{5\pi}{6}$.
   (b) $-\frac{\pi}{6}$ og $\frac{\pi}{6}$.

5. Svarene er:

$$0, \qquad \frac{3+2\sqrt{3}}{6}, \qquad \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

6. Se Figur 1 for en skitse af vinklerne

$$\theta + \frac{\pi}{2}, \qquad \pi - \theta, \qquad \theta + 3\pi.$$

7. Svarene kan være:

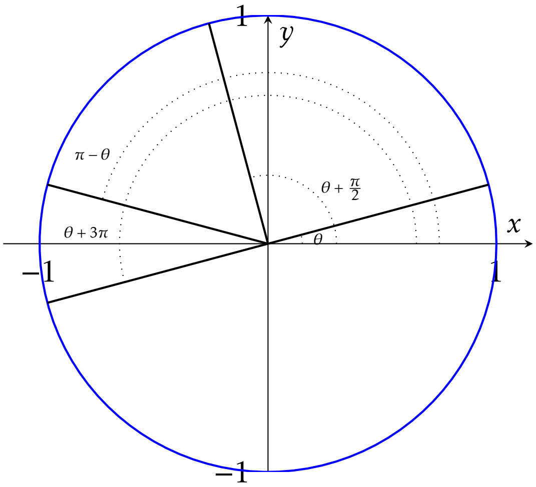
$$x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{2\pi}{3}, \qquad x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}, \qquad x = -\frac{\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}.$$

8. Indtegner man vinklen x i enhedscirklen dannes en retvinklet trekant med kateter $\cos x$, $\sin x$ og hypotenuse 1. Dermed giver Pythagoras sætning at

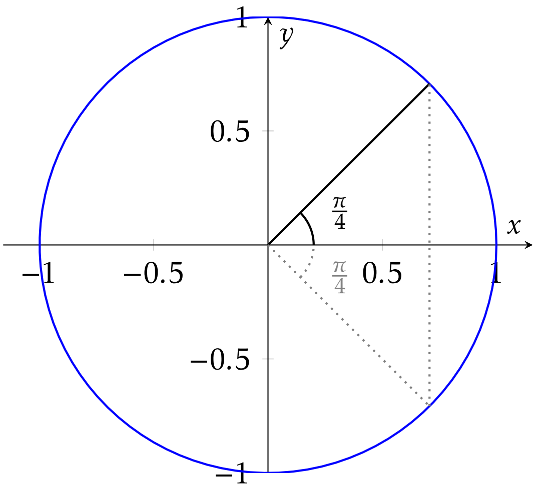
$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1.$$

9. Svarene er:

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \frac{1}{2}, \qquad 1, \qquad \frac{1}{2}.$$



Figur 1: Opgave 6



Figur 2: Opgave 12

10. Svarene er:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sqrt{3}, \qquad \frac{\sqrt{3}}{2}, \qquad 0.$$

11. Bruger vi hintet reducerer ligningen til

$$\sin^2 x + 3\cos^2 x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 1 + 2\cos^2 x = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \cos x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dermed er den eneste løsning i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$ givet ved $x = \frac{\pi}{4}$.

EKSTRAOPGAVER:

12. Svarene kan være:

    (a) Da trekanten i Figur 2 er retvinklet og begge kateter har længde 1 kan vi anvende Pythagoras og få at hypotenusen har længde $\sqrt{1+1} = \sqrt{2}$. Da $\sin\frac{\pi}{4}$ er halvdelen af hypotenusen fås at $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

    (b) Vi har at

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

13. Vi får at

$$\sin(-\theta) = \sin(0-\theta) = \sin(0)\cos(\theta) - \cos(0)\sin(\theta) = -\sin(\theta).$$

og

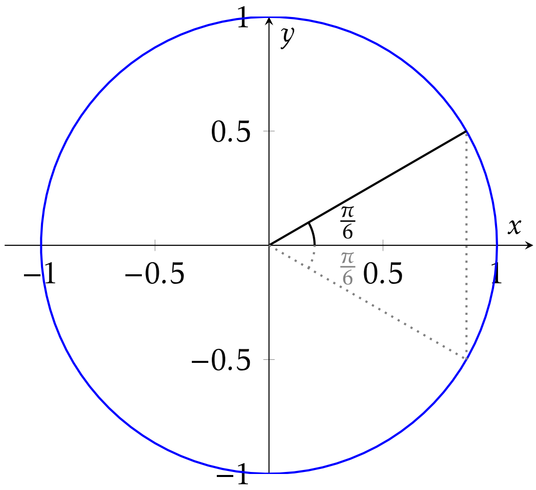
$$\cos(-\theta) = \cos(0-\theta) = \cos(0)\cos(\theta) + \sin(0)\sin(\theta) = \cos(\theta),$$

14. Vi har at

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \cos(\theta)\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \sin(\theta)\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin(\theta).$$

15. Vi har at

$$\sin(2\theta) = \sin(\theta+\theta) = \sin(\theta)\cos(\theta) + \cos(\theta)\sin(\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta).$$



Figur 3: Opgave 16

16. Svarene kan være:

    (a) Trekanten i Figur 3 har en vinkel på 60 grader og to af siderne har længde 1. Dermed må det være en ligesidet trekant hvor alle sidelængderne nødvendigvis er 1. Dette medfører at $\sin(\frac{\pi}{6})$, som er halvdelen af den lodrette stiplede linje, må være $\frac{1}{2}$.

    (b) Idiotformlen giver, at $\sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$ og ved at løse ligningen for $\cos(\frac{\pi}{6})$ får vi at $\cos(\frac{\pi}{6}) = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

    (c) Ved at bruge formlen fra Opgave 14

    $$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

    (d) Vi har at

    $$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

17. Svarene kan være:

    (a) Vi bruger hintet og får

    $$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$

    Gør vi det samme for cosinus får vi at

    $$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

    (b) Ved at bruge præcis samme fremgangsmåde som før får vi at

    $$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6} + \sqrt{2}),$$

og

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{1}{4} \cdot (\sqrt{6} - \sqrt{2}).$$