22. Kursusgang: Ubestemte integraler 1

I differentialregning studerede vi problemet med at finde $f'(x)$, hvis vi kender $f(x)$. Nu vil vi i stedet betragte det inverse problem, hvordan $f(x)$ kan findes, hvis $f'(x)$ kendes. For at løse dette problem vil vi introducere integralregning.

Hvis f er en kontinuert funktion, så siger vi, at F er en stamfunktion til f, hvis der gælder at

$$F'(x) = f(x).$$

Vi husker, at hvis $c \in \mathbb{R}$, så gælder der, at $\frac{d}{dx}c = 0$. Det betyder, at hvis F er en stamfunktion til f, så er

$$\frac{d}{dx}(F(x) + c) = \frac{d}{dx}F(x) = f(x),$$

også en stamfunktion til f. Det medfører at der er uendeligt mange stamfunktioner til en funktion. Vi definerer det ubestemte integral af en kontinuert funktion f til at være

$$\int f(x)\,dx = F(x) + c,$$

hvor $c \in \mathbb{R}$ og F er en stamfunktion til f (se Figur 1).

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f(x) \arrow[l, bend left, "\int dx"] \arrow[r, bend left, "\frac{d}{dx}"] & f'(x) \arrow[l, bend left, "\int dx"] \end{tikzcd}$$

Figur 1: Sammenhængen mellem integration og differentiation.

Eksempler:

1. Vis at både $F_1(x) = x^3 + 2x + 1$ og $F_2(x) = x^3 + 2x$ er stamfunktioner til $f(x) = 3x^2 + 2$:
   Vi tjekker om $F_1'(x) = f(x)$ og $F_2'(x) = f(x)$ ved at differentiere

   $$F_1'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x + 1) = 3x^2 + 2 = f(x),$$
   $$F_2'(x) = \frac{d}{dx}(x^3 + 2x) = 3x^2 + 2 = f(x),$$

   hvilket viser at både F_1' og F_2' er stamfunktioner til f.

2. Vis at $F(x) = e^x$ er stamfunktion til $f(x) = e^x$:
   Vi tjekker om $F'(x) = f(x)$ ved at differentiere

   $$F'(x) = \frac{d}{dx}e^x = e^x = f(x),$$

   hvilket viser at F er en stamfunktion til f.

Regneregler: Hvis f og g begge er kontinuerte funktioner, så har vi følgende regneregler for ubestemte integraler

1. $\displaystyle\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$, hvor $c \in \mathbb{R}$.
2. $\displaystyle\int f(x) \pm g(x)\,dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)\,dx$.

Der findes flere regneregler for ubestemte integraler, som vi vil betragte de næste par kursusgange.

Tabel over funktioner og deres stamfunktioner: I Tabel 1 er der en liste, over de mest almindelige funktioner og deres stamfunktioner

$f(x)$	$\int f(x)\,dx$
0	c
k	$kx + c$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c,\ n \neq -1$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + c$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$
e^x	$e^x + c$
e^{kx}	$\frac{1}{k}e^{kx} + c,\ k \neq 0$
$\ln x$	$x\ln(x) - x + c$
a^x	$\frac{1}{\ln(a)}a^x + c,\ a \neq 1$
$\log_a x$	$\frac{x(\ln(x)-1)}{\ln(a)} + c,\ a \neq 1$
$\cos x$	$\sin x + c$
$\sin x$	$-\cos x + c$
$\tan x$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + c$

Tabel 1: Udvalgte stamfunktioner.

Eksempler:

1. Bestem enhver stamfunktion til $f(x) = x^3 + 9x + 1$:

Ved at benytte begge regneregler og Tabel 1, får vi at

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,dx \\
&= \int (x^3 + 9x + 1)\,dx \\
&= \int x^3\,dx + 9\int x\,dx + \int 1\,dx \\
&= \frac{1}{4}x^4 + \frac{9}{2}x^2 + x + c.
\end{aligned}$$

2. Bestem enhver stamfunktion til $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x} + e^x$:

   Ved at benytte begge regneregel 2. og Tabel 1, får vi at

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,dx \\
&= \int \left(\frac{1}{x} + \sqrt{x} + e^x\right)dx \\
&= \int \frac{1}{x}\,dx + \int \sqrt{x}\,dx + \int e^x\,dx \\
&= \ln x + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + e^x + c.
\end{aligned}$$

3. Bestem den stamfunktion til $f(x) = 3e^{3x}$, som går gennem punktet $(0,7)$:

   Vi finder først enhver stamfunktion til f, ved at bruge regneregel 1. og Tabel 1

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int f(x)\,dx \\
&= \int 3e^{3x}\,dx \\
&= 3\int e^{3x}\,dx \\
&= 3\cdot\frac{1}{3}e^{3x} + c \\
&= e^{3x} + c.
\end{aligned}$$

   Da vi ved, at F går gennem punktet $(0,7)$, har vi, at $F(0) = 7$. Indsætter vi dette, får vi én ligning med én ubekendt som vi kan løse, for at finde c

$$\begin{aligned}
F(0) = 7 &\Leftrightarrow e^{3\cdot 0} + c = 7 \\
&\Leftrightarrow 1 + c = 7 \\
&\Leftrightarrow c = 6.
\end{aligned}$$

   Det giver, at den stamfunktion der går gennem punktet $(0,7)$, er $F(x) = e^{3x} + 6$.