Funktioner

NCUM-tema udarbejdet af

Marit Schou, OTG

og

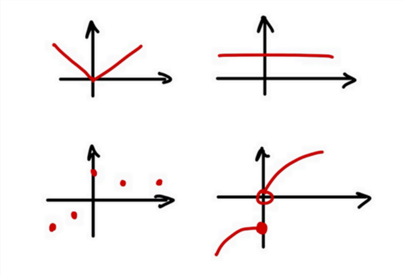
Lisbeth Fajstrup, AAU
Videreudvikling i ”UNZIP”-kurser
https://www.math.aau.dk/samarbejde/gymnasier/unzipkursus-funktioner

Matematiske funktioner

En funktion er en sammenhæng mellem to størrelser, en sammenhæng der kan forstås og beskrives på mange niveauer. Det gør det muligt at arbejde med funktioner gennem hele uddannelsessystemet, fra dagtilbud til gymnasie og erhvervsuddannelse.

Funktionsbegrebet er væsentligt og vanskeligt. Sammen med algebra udgør funktioner et helt nødvendigt fundament for andre matematiske emner samt for anvendelser inden for mangfoldige områder.

Hør nærmere om funktioner og de forskellige måder vi repræsenterer dem på. Lær om, hvorfor mange elever har så svært ved funktioner, og se eksempler på eksotiske funktioner, som du aldrig har tænkt på!



Hvad er funktioner? Og hvorfor er funktionsbegrebet så vigtigt?

En funktion beskriver en sammenhæng mellem to størrelser. Det kan man finde gode eksempler på og arbejde med allerede i dagtilbud. Og så er scenen sat for mere præcise og abstrakte måder at definere funktioner på, som man ser det i grundskolen, på erhvervsuddannelserne og i gymnasiet. Med gode og præcise definitioner, bliver det lettere at arbejde med funktioner, både i teori og praksis. Og det bliver muligt at beskrive og undersøge mange af de ting vi møder i hverdagen fx gennem matematisk modellering.

Hvorfor er funktionsbegrebet så svært?

Funktioner kan beskrive noget meget konkret, men er i deres natur meget abstrakte. Funktioner er både noget, man opererer med, f.eks. beregner funktionsværdier, og noget, man opererer på, f.eks. lægger sammen eller differentierer. Læs om nogle af de læringsvanskeligheder, som forskningen har identificeret, og som man som lærer møder i klasseværelset.

Hvordan kan man arbejde med funktionsbegrebet?

Vi ser nærmere på undervisningspraksis og beskriver gennem eksempler vigtige pointer ved forskellige aspekter af funktionsbegrebet. De fire repræsentationsformer er i fokus, og der lægges særlig vægt på grafer, som en indgang til funktionsbegrebet, der ikke bremses af elevernes eventuelle udfordringer med algebra.

Idéer til undervisningsaktiviteter med funktioner på forskellige klassetrin

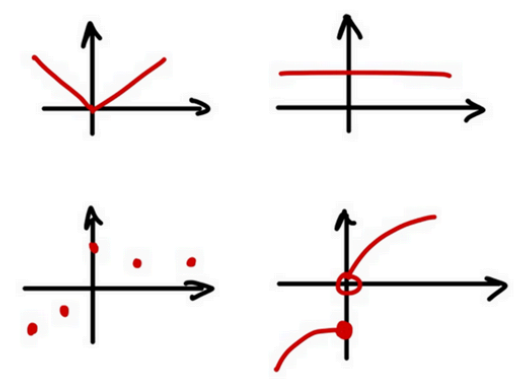
Få luft under vingerne! Her er mange sjove, sære, anderledes aktiviteter til arbejdet med funktioner og på tværs af uddannelserne.

Matematiske funktioner

En funktion er en sammenhæng mellem to størrelser, en sammenhæng der kan forstås og beskrives på mange niveauer. Det gør det muligt at arbejde med funktioner gennem hele uddannelsessystemet, fra dagtilbud til gymnasie og erhvervsuddannelse.

Funktionsbegrebet er væsentligt og vanskeligt. Sammen med algebra udgør funktioner et helt nødvendigt fundament for andre matematiske emner samt for anvendelser inden for mangfoldige områder.

Hør nærmere om funktioner og de forskellige måder vi repræsenterer dem på. Lær om, hvorfor mange elever har så svært ved funktioner, og se eksempler på eksotiske funktioner, som du aldrig har tænkt på!



Hvad er funktioner? Og hvorfor er funktionsbegrebet så vigtigt?

En funktion beskriver en sammenhæng mellem to størrelser. Det kan man finde gode eksempler på og arbejde med allerede i dagtilbud. Og så er scenen sat for mere præcise og abstrakte måder at definere funktioner på, som man ser det i grundskolen, på erhvervsuddannelserne og i gymnasiet. Med gode og præcise definitioner, bliver det lettere at arbejde med funktioner, både i teori og praksis. Og det bliver muligt at beskrive og undersøge mange af de ting vi møder i hverdagen fx gennem matematisk modellering.

Hvorfor er funktionsbegrebet så svært?

Funktioner kan beskrive noget meget konkret, men er i deres natur meget abstrakte. Funktioner er både noget, man opererer med, f.eks. beregner funktionsværdier, og noget, man opererer på, f.eks. lægger sammen eller differentierer. Læs om nogle af de læringsvanskeligheder, som forskningen har identificeret, og som man som lærer møder i klasseværelset.

Hvordan kan man arbejde med funktionsbegrebet?

Vi ser nærmere på undervisningspraksis og beskriver gennem eksempler vigtige pointer ved forskellige aspekter af funktionsbegrebet. De fire repræsentationsformer er i fokus, og der lægges særlig vægt på grafer, som en indgang til funktionsbegrebet, der ikke bremses af elevernes eventuelle udfordringer med algebra.

Idéer til undervisningsaktiviteter med funktioner på forskellige klassetrin

Få luft under vingerne! Her er mange sjove, sære, anderledes aktiviteter til arbejdet med funktioner og på tværs af uddannelserne.

Hvad er en funktion?

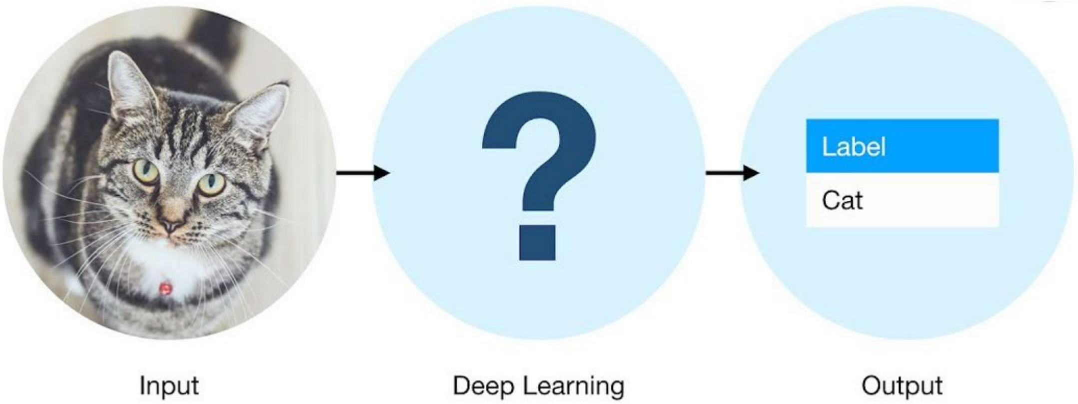
- Universitetsmatematik: En funktion $f: A \rightarrow B$ er en delmængde $f \subseteq A \times B$ som opfylder, at der til ethvert element $x \in A$ findes præcis ét $y \in B$, så $(x, y) \in f$. Her er $A \times B$ mængden af alle par (*x*, *y*), hvor *x* er et element i definitionsmængden *A* og *y* er i B.
- *Grundskolen (Formelsamling 2017): En funktion er en sammenhæng mellem variable, der kan beskrives med tal. Det kan f.eks. være sammenhængen mellem et antal kilogram kartofler og det antal kroner, du skal betale for kartoflerne.*
  Hvis funktionen er en sammenhæng mellem to variable, kalder man som regel den ene variabel for x og den anden for y. En funktion kan altså f.eks. være en sammenhæng mellem x kg kartofler og y kr. Prisen, y, er afhængig af antal kilogram kartofler, og den kalder man derfor for den afhængige variabel. Man kalder x for den uafhængige variabel.
  I en funktion kan der kun høre én y-værdi til en x-værdi. Sammenhængen mellem x kg kartofler og y kr. er en funktion, fordi der ikke kan høre mere end én pris til f.eks. 2 kg kartofler.
- Gymnasierne – noget midt imellem - brobygning.

Eksempler på funktioner - uden tal i enten input eller output

- QR-koder og stregkoder

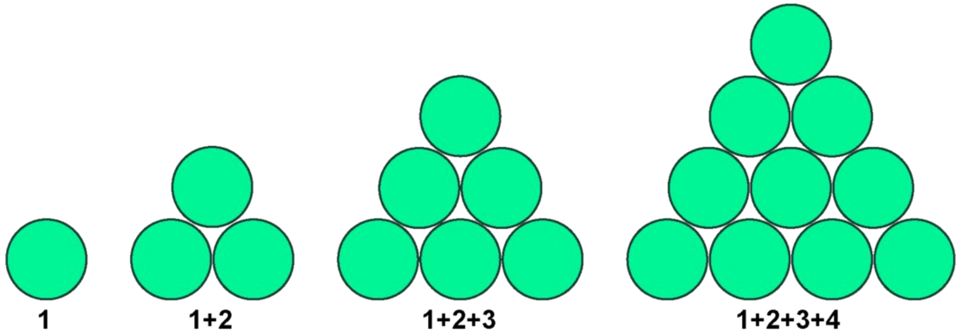
- CPR-nummer som funktion.

- Fra billede til ja/nej til, om der er en kat på billedet



Eksempler på funktioner - med naturlige tal i input eller output

- Trekantstal

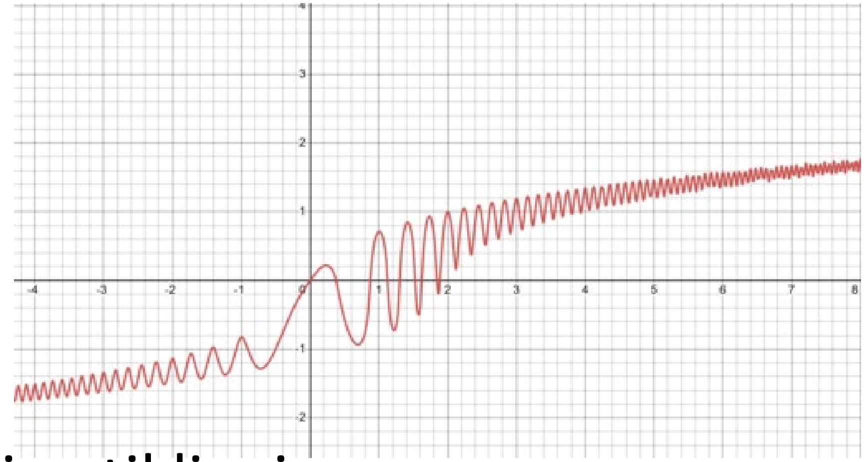


- Fakultetsfunktionen

$$\pi \xrightarrow{\text{at 100 digits}}$$

3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706 8

Funktioner uden funktionsforskrift



Implicit givne

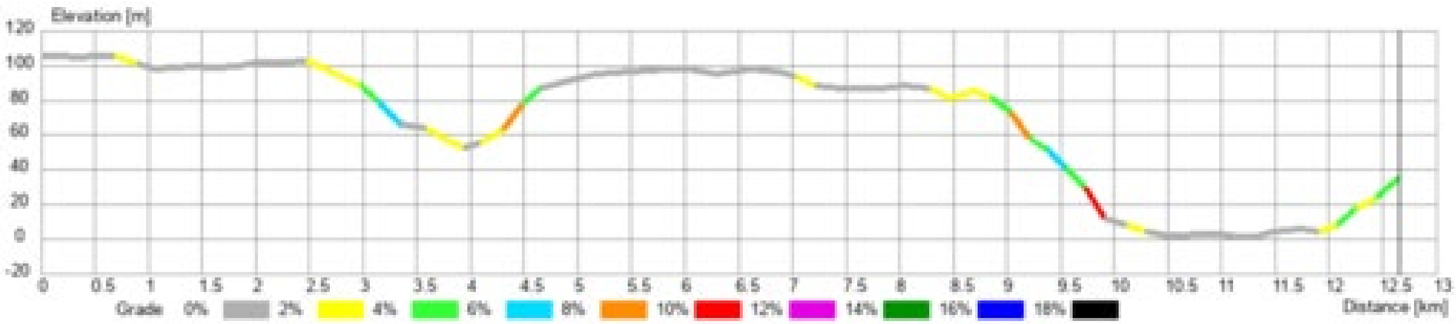
$$y^3 + 2^y = cos(2\pi x^2) + x$$

- Giver *y* som funktion af *x*, da der kun er én løsning til ligningen, hvis vi betragter *y* som ubekendt.
- Mere filosofisk: Hvornår er noget en funktionsforskrift? Hvilke udtryk må indgå? Hvad med eksponentialfunktioner og logaritmer? Hvad med normalfordelingen? Hvad med Gammafunktioner?

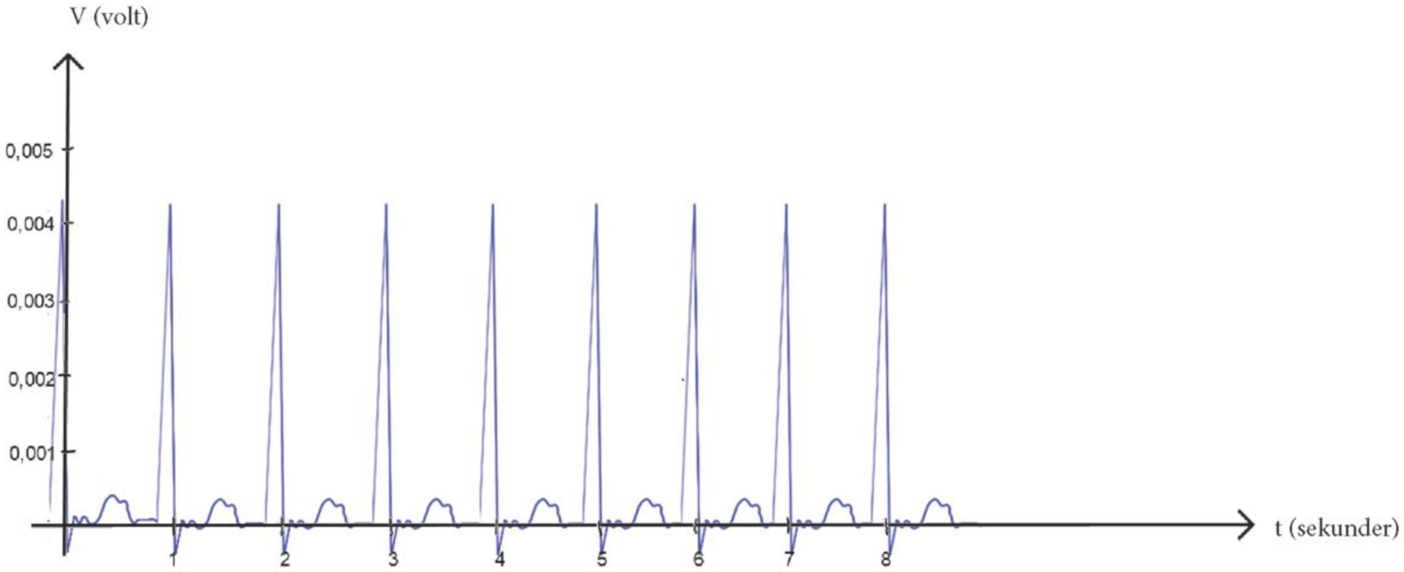
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$$

Modellering: Funktioner givet fra det, vi vil modellere, har ikke altid en funktionsforskrift.

Funktioner uden funktionsforskrift



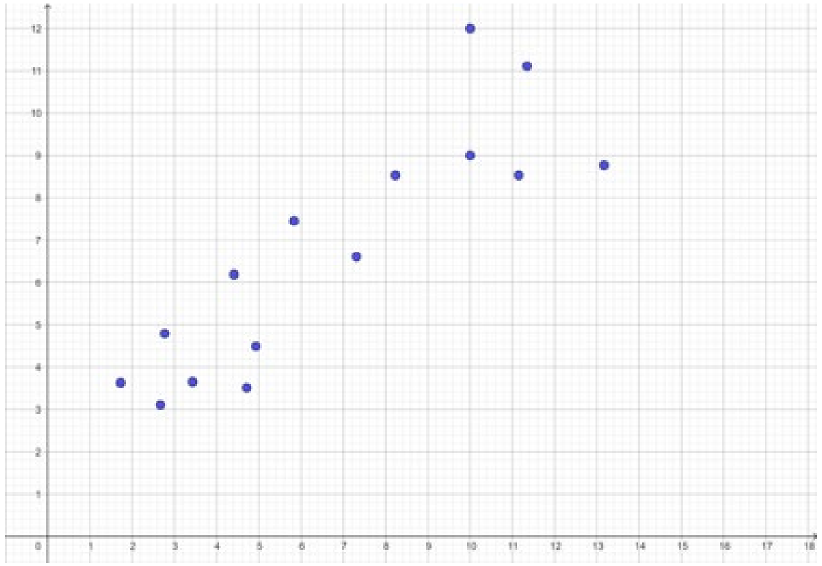
Cykelrute fra Jelling til Vejle

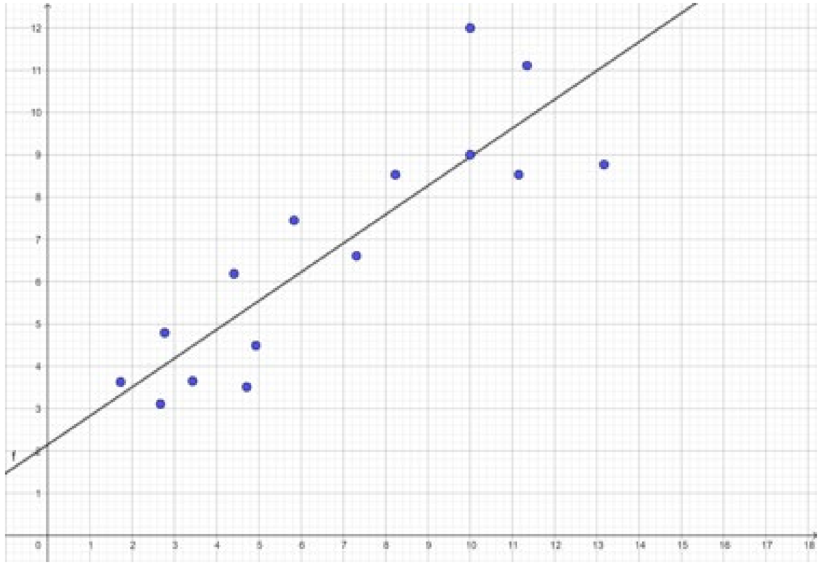


EKG

Funktioner gemt i ”bedste polynomium”

- *f*: data ⟶ (koefficienter i) polynomium.
- Bedste rette linje: data ⟶ *a* og *b* i $a \cdot x + b$.



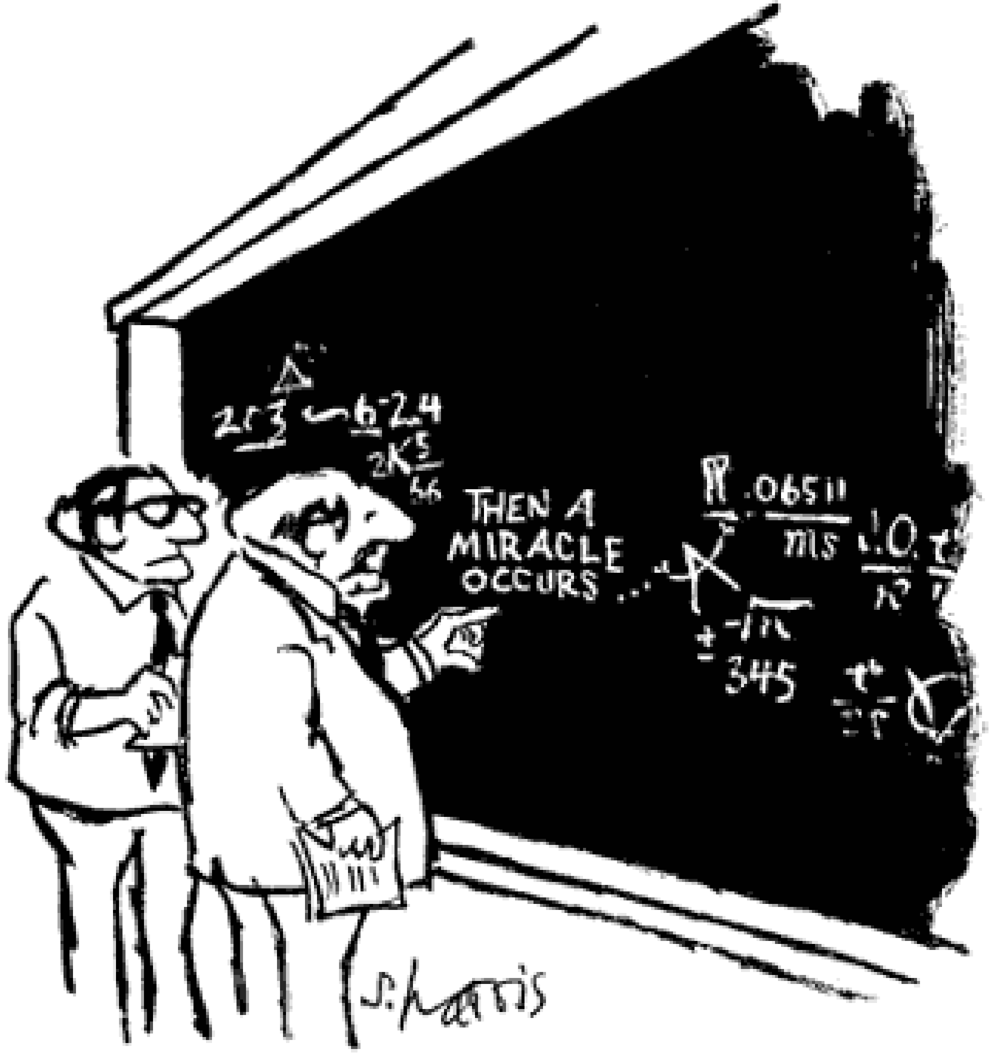


Input: (1.73,3.63), (3.43,3.65), (4.41,6.19), (7.31,6.61), (5.83,7.45), (10,9), (8.23,8.53), (11.35, 11,11), (13.17, 8.77), (2.77, 4.79), (4.93, 4.49), (4.71, 3.51), (2.67, 3.11), (11.15, 8.53), (10,12)
Output: *a* = 0,68, *b* = 2,15, eller (0.68, 2.15)

Bedste rette linje – begrebsudbygning

- Hvad er inputmængden? Skal der være 15 punkter ? Næppe!
- Må punkter have samme førstekoordinat og forskellig anden koordinat?
- Hvordan varierer output, når vi varierer input? Kovariation i nye klæder.

Hvorfor pokker er det så svært?



"I think you should be more explicit here in step two."

- Manglende algebraisk indsigt
- Dualiteten mellem proces og objekt
- De mange forskellige repræsentationer – og vekslen imellem dem
- Når undervisningens begrebsdefinitioner ikke stemmer overens med elevernes begrebsbilleder

Proces eller objekt?

Funktioner kan opfattes som

- Processer, hvor man ofte *regner* nogle konkrete værdier *ud*

  $f(7) = 2 \cdot 7^2 + 2 = 100$ eller

  $2 \cdot x^2 + 2 = 34 \Rightarrow x = 4$

- Objekter, hvor man *regner på* eller *med* dem

  $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

  $(f+g)'=f'+g'$

Anna Sfard

Eleverne skal se funktioner på begge måder, og skal kunne veksle mellem de to perspektiver afhængigt af konteksten.

Funktioner som objekter

Funktioner som objekter og helt abstrakt ”funktionen *f*”, skal eleverne, uden som udgangspunkt at kende *f* nærmere via en af de fire repræsentationer, kunne give mening til:

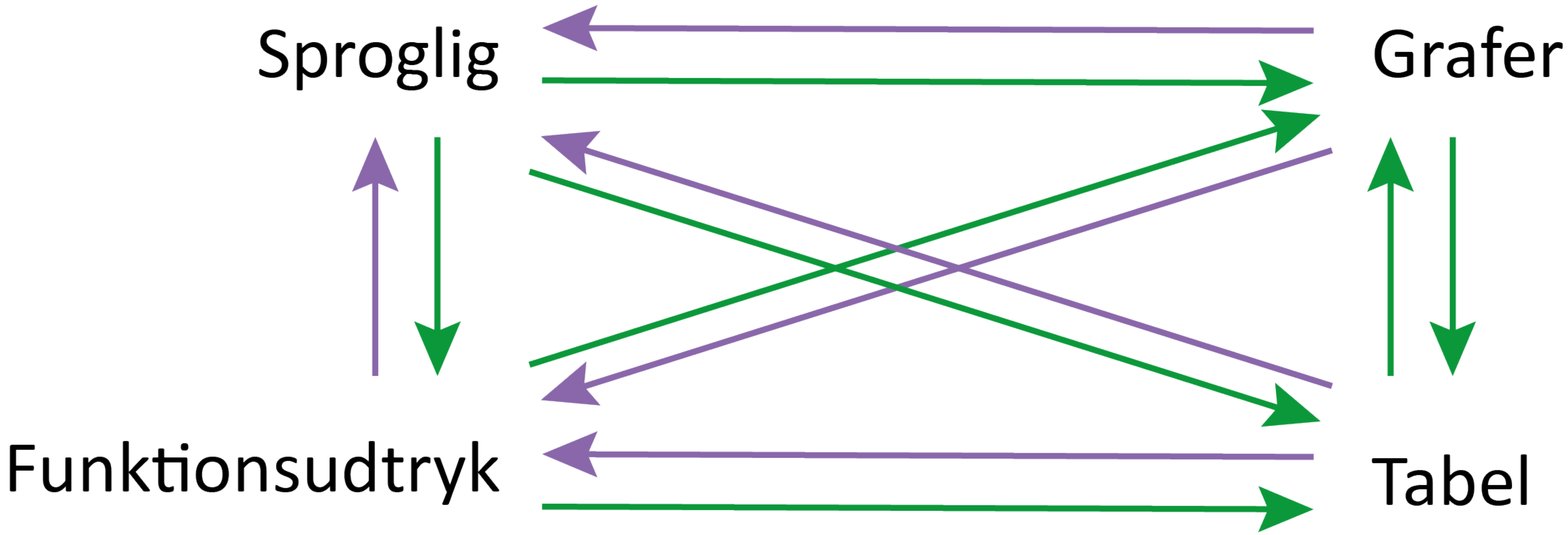
- Den afledte af en differentiabel funktion *f*, der er en ny funktion *f*’.
- Summen af to reelle funktioner *f* og *g*, som begge er defineret på samme interval, giver en ny funktion $h = f + g$, som på dette interval er defineret ved funktionsforskriften $h(x) = f(x) + g(x)$.
  Tror eleverne, det er ”at hæve parenteser”?
  Forstår de det bedre, hvis de laver operationen på *grafer for funktioner, de ikke kender funktionsudtrykkene for*?

- Sammensatte funktioner – hvor langt kan man komme med grafer?
- Inverse funktioner – er det virkelig ”byt om på x og y og løs for y”?
- Differentialligningen $f' = f$. Det giver endnu en repræsentation af en funktion: f er løsningen til $f' = f$ og $f(1) = 1$.
- To funktioner f og g er ens, $f = g$ (endnu en anvendelse af lighedstegnet), hvis de
  1. har samme input- og outputmængde
  2. $f(x) = g(x)$ for *alle* x i inputmængden.

Lighedstegnet $f = g$ volder kvaler selv på de videregående uddannelser.

Forskellige repræsentationer og deres forbindelser

- Forskrift, graf, tabel, tekst



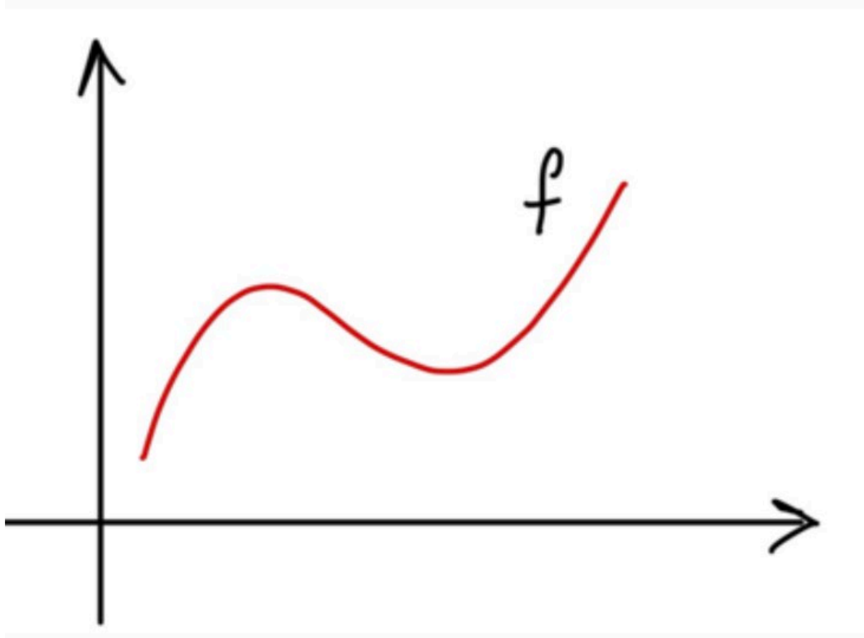
Begrebsbilleder og begrebsdefinitioner

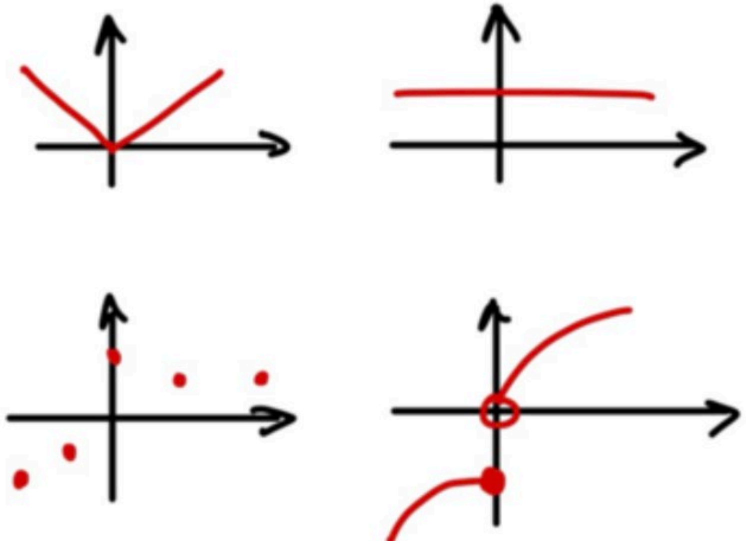
Den forståelse og mening, som elever tillægger matematiske begreber afhænger af de erfaringer, de har gjort sig gennem konkrete oplevelser. Alle de forståelser og opfattelser, en elev får af en funktion gennem problemløsning, modellering osv., og gennem brugen af forskellige repræsentationer, kalder man tilsammen for elevens **begrebsbillede**.

Forskning viser, at uanset hvilken **formel definition** af en funktion, der undervises i, danner eleverne deres forståelse ud fra de personlige og konkrete erfaringer, de har med funktioner.
Man kan derfor ikke forvente, at eleverne selvstændigt kan anvende funktionsbegrebet på nye måder og i ukendte situationer (Tall, D., & Vinner, S. (1981))

Billeder – i repræsentationen grafer.

- ’Standardgrafen’.



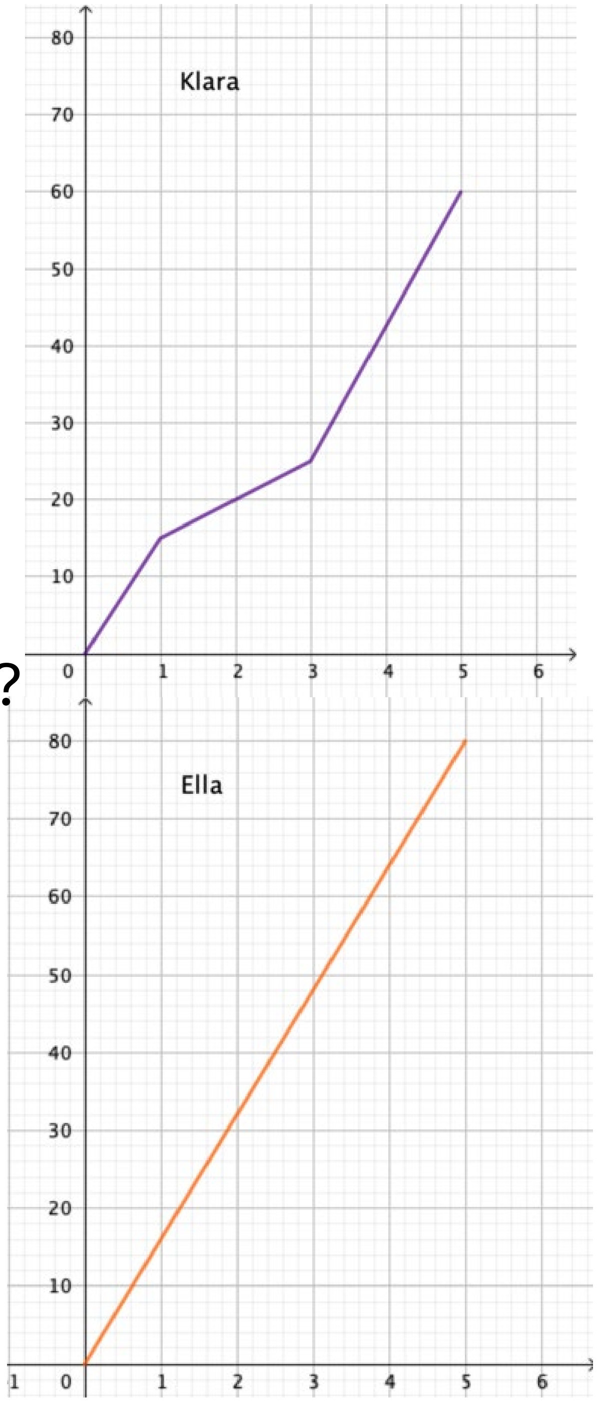


- Eleverne danner mange forskellige billeder af, hvad en funktion er og kan være i undervisningen.
- Det er helt almindeligt, at de er fejlagtige, mangelfulde og endda selvmodsigende.
- Eleven behøver slet ikke at opdage, er der er problemer med nogle af begrebsbillederne, for de bruges ofte kun en ad gangen. Først når to modstridende begrebsbilleder fremkaldes samtidig, opdages problemet.

Erfaringer fra første UNZIP. Eksempler.

- Mange fine forløb, som bliver lagt ud senere. En del om repræsentationsformerne. Grundforløb og overgange.
- Afprøvninger i HHX, HTX, STX, HF
- ”Kig på grafer” er godt - både for svage og stærke elever. Fra grafen for f til grafen for 2f eller grafen for f+g.
- Repræsentationsformen ”sproglig beskrivelse” – pilene til den – giver sprog for begreberne.
- Brug af laminerede ark eller tavler, hvor man kan viske ud, er godt.
- Analog (uden computer) giver flere aktive elever – mere trygge.
- Gennemgående kontekst – a la brusebad – fungerer godt. Men hvad med begrebsbillederne?

Ella og Klara – aflæsning på grafer, sumfunktioner, multiplikation med skalar, hældning.



- Hvor meget vand bruger Ella i minuttet? Hvad med Klara?
- Hvordan ser grafen ud for, hvad de to bruger tilsammen?
- Hvor lang tid går der, før de tilsammen har brugt 75 liter.

Jonas bruger dobbelt så meget vand i minuttet som Klara.

- Tegn grafen for Jonas' vandforbrug.
- Tegn andre vandforbrugsgrafer og fortolk dem.
  Uden GeoGebra. Uden funktionsudtryk.

Til slut en række eksempler på aktiviteter, hvor grafer spiller en stor rolle.

Aktiviteter - Funktionsfabrikken

Eleverne arbejder i grupper, der fabrikerer funktioner og bestiller funktioner hos de andre grupper.

Bestillinger kunne være:

- En funktion, der er lineær og hvis graf ikke skærer x-aksen
- En funktion, der vokser mellem $x = 2$ og $x = 6$, aftager mellem $x = 6$ og $x = 8$.
- En funktion f, der vokser og opfylder $f(0) = 2$, $f(3) = -2$ (Det er ok med umulige funktioner.)
- En differentiabel funktion med afledt 0 i $x=1$ og $x=5$

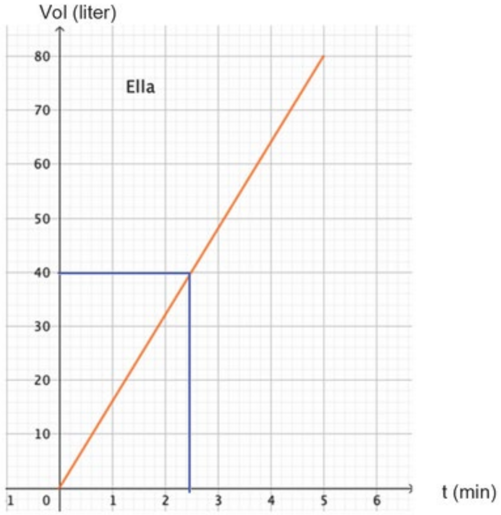
Gruppen, der får bestillingen, kan

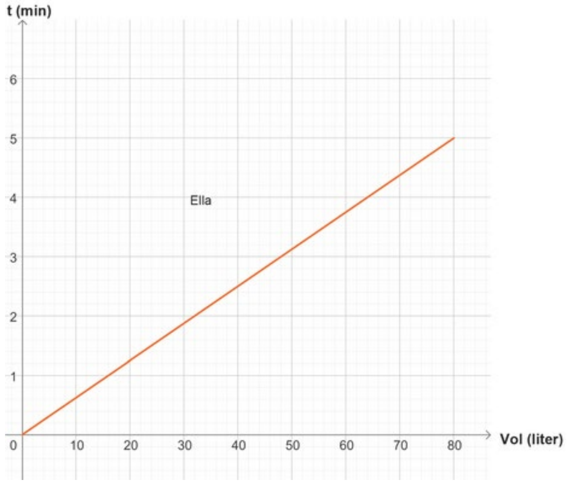
- Lave en graf eller forskrift for en funktion, der er som ønsket.
- Svare, at der ikke findes sådan en funktion.
- Overveje, om der er flere funktioner, der passer til kravene.

Grupperne, der bestiller, kan overveje

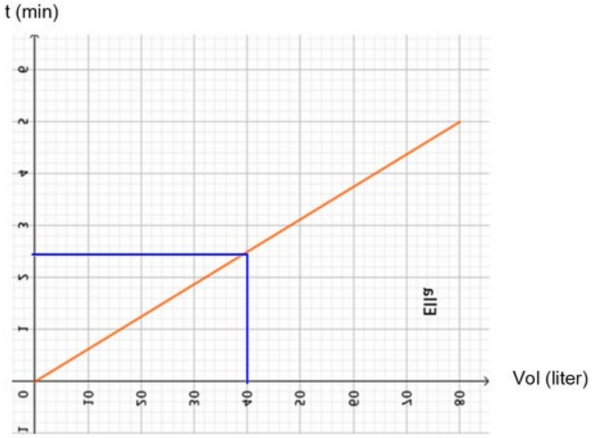
- Hvordan sikrer man sig, at fabrikken leverer det, man vil have – måske har gruppen selv tegnet grafen for det, der ønskes?

Ella og Klara – inverse funktioner

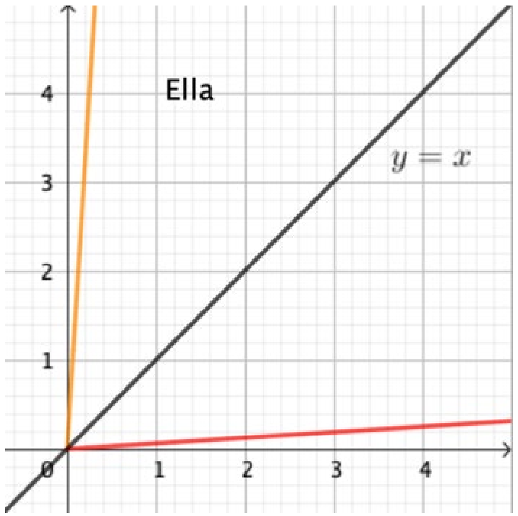




Udforsk invers funktion ud fra grafer:
Aflæsning ”fra *y*-akse til graf til *x*-akse”.
Den inverse funktion går ”den anden vej”.
$f: A \longrightarrow B$ og $f^{-1}: B \longrightarrow A$
Grafen er den spejlede; akserne spejles også.



Spejling af graf – inklusive akser.



Det er *misledende* at tegne graferne i samme koordinatsystem.

Aktiviteter – vand i beholdere

Eleverne hælder vand i glas, kolber, vaser,…, som har forskellig facon.
De registrerer vandhøjden for hver halve (eller kvarte) deciliter, de har hældt i.

- Data indtegnes i et koordinatsystem med højde som funktion af vandmængde.

Spørgsmål og erkendelser fx:

- Hvordan vokser vandhøjden? Er det som forventet, når man ser på beholderen? Spørgsmålet kan overvejes af eleverne på forhånd og afklares i eksperimentet.
- Hvordan ser glasset ud, hvis grafen er lineær?
- Når vandhøjden er *y* cm, hvor meget vand er der så fyldt i. Hvordan ser den graf ud?
- Ud fra en profil for en flaske – og tilhørende vandhøjdegraf. Hvad er sammenhængen mellem profilen og (variationen af) vandhøjdegrafen?

Aktiviteter - funktionsbyggeren

Udvælg et antal funktioner som eleverne kender (konstante, lineære, 2.gradspolynomium, eksponentialfunktioner osv.) Det er *byggeklodserne* og de kan været givet som grafer eller som forskrifter og være konkrete eller generelle.

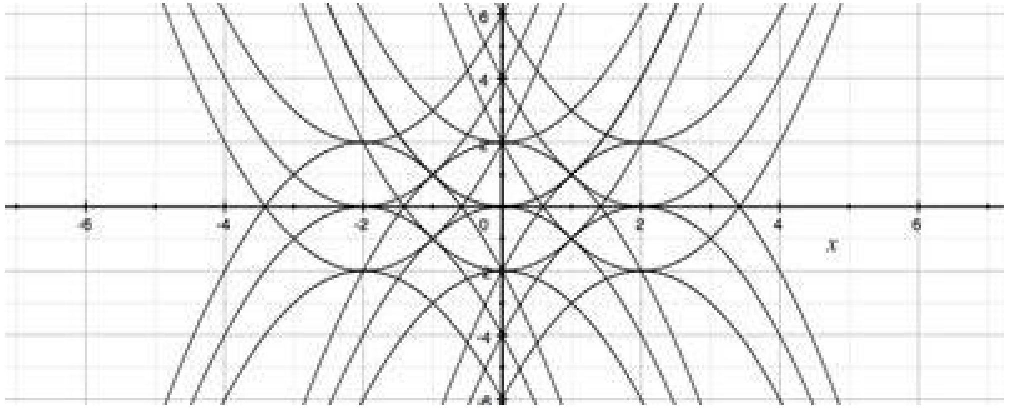
Ud fra disse funktioner kan man nu bygge nye funktioner ved at addere, subtrahere, multiplicere etc. Eleverne skal opstille regler for, hvad der gælder for de nye funktioner, fx

- Hvis f og g er lineære, er $f + g$ så lineær? Hvad med $f \cdot g$?
- Hvad kan man sige om skæring med x-aksen for den nye funktion?
- Hvordan afhænger fortegnet for den nye funktion af fortegnet for byggeklodserne?
- Kan man sige noget om $f \cdot g$, hvis f er konstant? Hvis f og g er lineære?
- Kan man tage to lineære funktionsbyggeklodser, så $f \cdot g$ ikke har nogen rødder? Så toppunktet er et bestemt givet punkt?

Aktiviteter: FunktionsJeopardy

Eleverne er i grupper. De får udleveret et kort med grafen for en funktion. Alle ved på forhånd, hvilke funktionstyper, det drejer sig om. Lineære eller kvadratiske vil være oplagt.

- Et gruppemedlem må *ikke* se kortet, men skal stille ja/nej spørgsmål til de andre og finde ud af, hvad det er for en funktion.
- De andre skal blive enige om svaret – måske skrive det ned. Hvis ikke, de er enige, må de konferere.
- Begrænset antal spørgsmål. Og gæt.
- Muligt at svare med koldt/varmt.
- Se mere på https://nrich.maths.org/6988

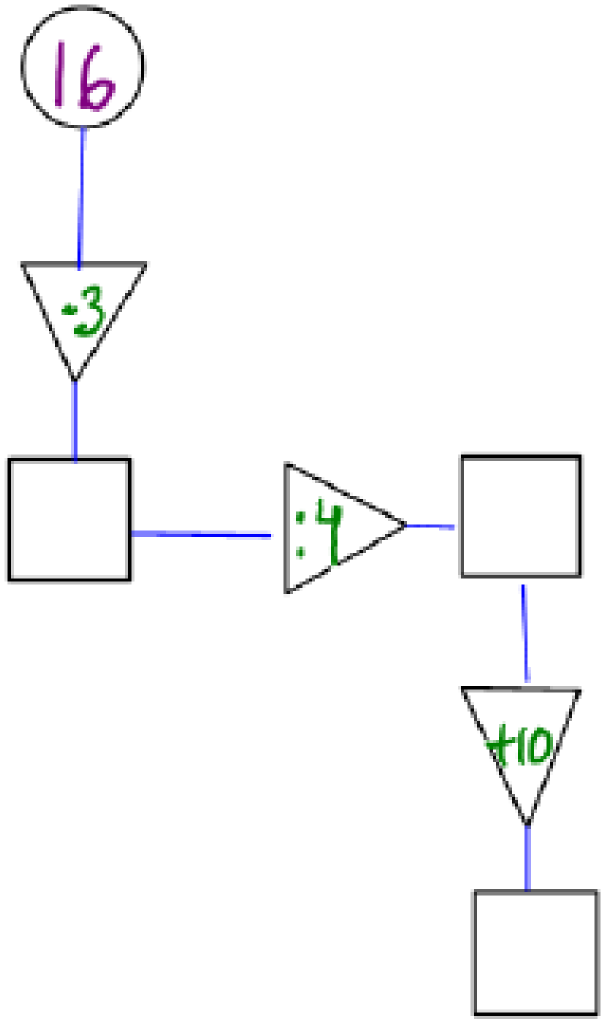


Figur fra nrich.

Funktions-VVS

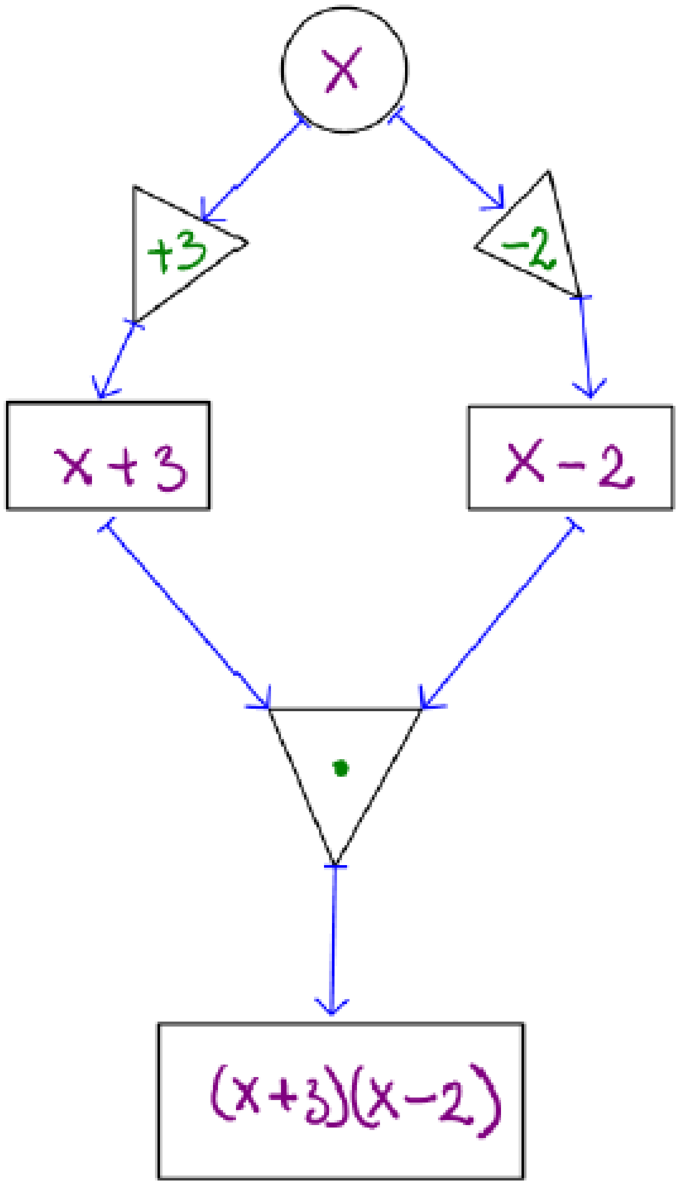
Grundskolens ”regneslanger” udvides,
så slangerne deles og mødes.
(Idé fra nrich’ NumberPlumber)

En regneslange er en beskrivelse af en (sammensat) funktion. Hvis man lader input være den uafhængige variabel.
(I skolen er det et bestemt tal).

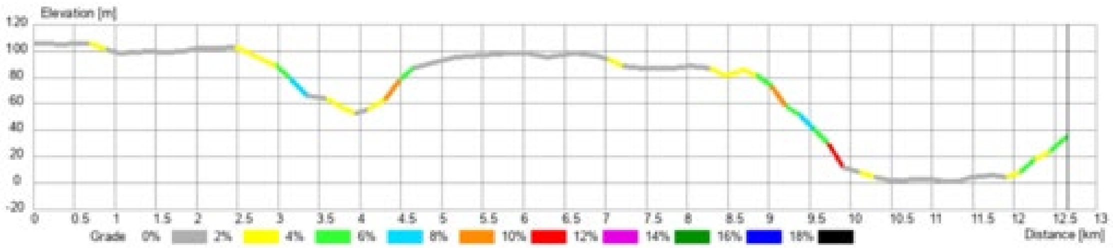


- Eleverne kan opskrive det samlede funktionsudtryk. Udregne funktionen i givne værdier. Lave en graf. Etc.
- Eleverne udfordrer hinanden i ”fra funktionsudtryk til vvs” eller ”fra vvs til funktionsudtryk”.

Faldgrube: Proceslighedstegn, hvis eleverne sætter lighedstegn i stedet for pile, når der regnes i regneslanger.



Aktiviteter: Cykelruter



Eleverne får en profil af en cykelrute indtegnet i et koordinatsystem med højden som funktion af den vandrette afstand. De skal herefter skitsere cyklistens hastighed som funktion af den vandrette afstand.

Spørgsmål til eleverne:

- Hvad skal man vide om cyklisten for at lave denne skitse?
  (Bliver hun træt undervejs? Har hun en tophastighed på en vandret strækning? Skal hun stå af og trække, hvis det bliver meget stejlt?)
- Kan man lave cykelrutens profil som funktion af, hvor langt, man har kørt – eller som funktion af tiden, det har taget?
  Hvorfor er det ikke det samme som den vandrette afstand? Hvordan vil det ændre grafen?

Evaluering af gymnasielærerdagen