Facit til kursusgang 26: Bestemte integraler 2

1. Svarene er:

$$20, \qquad \frac{242}{5}, \qquad 2\ln(2) - \frac{3}{4}$$

2. Svarene er:

$$\frac{\sqrt{2}-2}{2}, \qquad 1, \qquad \frac{1}{24}$$

3. Svarene er:

$$\frac{52}{3}, \qquad \ln\left(\frac{2+\sqrt{2}}{2}\right), \qquad \frac{1}{4}.$$

4. Svaret er -2.

5. Svarene er:

$$-2\pi, \qquad 2\ln(2) - \frac{3}{4}, \qquad 64\ln(4) - 21.$$

6. Svarene er:

$$4 - 6\ln(3), \qquad 20\sqrt{30}.$$

EKSTRAOPGAVER:

7. Hvis $u = -x$ så er $-du = dx$ hvilket giver at

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-u)\,du = -\int_{a}^{0} -f(u)\,du = \int_{a}^{0} f(u)\,du = -\int_{0}^{a} f(u)\,du.$$

Da u bare er navnet på variablen kunne vi lige så godt kalde den for x. Dermed får vi

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Bruger vi opgave 7 fra 25. kursusgang får vi at

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0.$$

8. Da alle funktionerne der integreres er ulige og intervallerne der integreres over er symmetriske om y-aksen giver alle integralerne 0.

9. Hvis $u = -x$ så er $-du = dx$ hvilket giver

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_{a}^{0} f(-u)\,du = -\int_{a}^{0} f(u)\,du = \int_{0}^{a} f(u)\,du.$$

Da u bare er navnet på variablen kunne vi lige så godt kalde den for x. Dermed får vi

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

Bruger vi opgave 7 fra 25. kursusgang får vi at

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} f(x)\,dx &= \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx\\ &= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

10. Svarene er:

$$4, \qquad \frac{1}{24}$$

11. Svarene er:

   (a) $f(-x) = (-x)^{-2}\sin(\frac{1}{-x}) = -x^{-2}\sin(\frac{1}{x}) = f(x)$.

   (b) $F(x) = \cos(\frac{1}{x})$.

   (c) I opgave 7 var det en antagelse at funktionen vi betragtede var kontinuert, men f er ikke kontinuert.

12. Hvis $u = \sqrt{x}$ så er $2u\,du = dx$, hvilket giver at

$$\int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}}\,dx = 2\int_{0}^{1} ue^{u}\,du = 2[(u-1)e^{u}]_{0}^{1} = 2.$$

13. Hvis $u = \sqrt{x}$ så er $2u\,du = dx$, hvilket giver at

$$\int_{0}^{\pi^2} \sin\sqrt{x}\,dx = \int_{0}^{\pi} u\sin u\,du = [\sin u - u\cos u]_{0}^{\pi} = 2\pi.$$

14. I denne opgave vil vi beskrive arealet af en cirkel med vilkårlig radius.

   (a) Den øvre halvdel af enhedscirklen kan beskrives med funktionen $y = \sqrt{1-x^2}$. integrerer vi denne funktion fra 0 til 1 må vi få en fjerdedel af cirklen areal. Dermed er

$$4\int_{0}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx = \pi.$$

(b) Den øvre halvcirkel kan beskrives som funktionen $y = \sqrt{r^2 - x^2}$. Integrerer vi dette fra 0 til r og ganger med 4 må vi få arealet af hele cirklen. Altså er

$$A = 4\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}\,dx = 4r\int_0^r \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\,dx,$$

og hvis vi substituer $u = \frac{x}{r}$ så er $rdu = dx$ og dermed får vi ved at anvende del (a) at

$$A = 4r\int_0^1 r\sqrt{1 - u^2}\,du = r^2\pi.$$

15. Svarene er:

(a) Hvis hvis $a = b$ kan ellipsens ligning omskrives til

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = a^2.$$

(b) Den øvre halvellipse kan beskrives som funktionen $y = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$. Integrerer vi dette fra 0 til a og ganger med 4 må vi få arealet af hele cirklen. Altså er

$$A = 4\int_0^a b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\,dx,$$

og hvis vi substituer $u = \frac{x}{a}$ så er $adu = dx$ og dermed får vi ved at anvende del (a) i forrige opgave at

$$A = 4b\int_0^1 a\sqrt{1 - u^2}\,du = ab\pi.$$

(c) Hvis $a = b$ så har vi vist at ellipsen bliver en cirkel med radius $a = b$, hvorfor formlen πab for ellipser generaliserer formlen πab for ellipser.

16. Arealet er $\pi^2 - 4$.

17. Først omskriver vi $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$. Ved at integrere får vi at

$$\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(2x) - \sin(x)\,dx = [\frac{1}{2}\cos(x) - \frac{1}{4}\cos(2x)]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{8}.$$