Opgaver til kursusgang 10: Funktioner 4 (eksponentiel og logaritme-funktioner)

1. Udregn følgende tal

$$2^4, \qquad 4^{-1}, \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^3, \qquad \left(\frac{1}{3}\right)^{-3}, \qquad 123^0.$$

2. Udregn følgende tal

$$\log_2(16), \qquad \log_{10}(1000), \qquad \log_3\left(\frac{1}{9}\right), \qquad \ln(e^6), \qquad \log_{123}(1)$$

3. Bestem fordoblings- eller halveringskonstanten for hver af de følgende funktioner

$$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, \qquad g(x) = 3e^x, \qquad h(x) = e^{-x}.$$

4. Udregn følgende tal

$$\log_{10}(40) + \log_{10}(25), \qquad \log_{10}(40) - \log_{10}(4), \qquad \log_4(32) + \log_4\left(\frac{1}{2}\right)$$

5. Udregn følgende tal

$$\ln(\sqrt{e}), \qquad \log_{10}(5^{3/2}) + \frac{1}{2}\log_{10}(5) + \frac{1}{3}\log_{10}(64), \qquad \frac{1}{2}\log_5(4^2 + 9 + 10^2)$$

6. Udregn følgende tal

$$e^{\ln(1)}, \qquad 2^{2+\log_2(10)}, \qquad 10^{3\log_{10}(7)}, \qquad 7^{-\log_7(9)}, \qquad 4^{\log_2(3)}$$

7. Bestem a og b så at $f(x) = b \cdot a^x$ går gennem punkterne $(1,2)$ og $(3,4)$.

8. Løs ligningerne

$$e^x = 5, \qquad 10^{x^2} = 100^x, \qquad 2^{x+1} = 3, \qquad e^{x^2-45} = e^{-135}e^{19x}$$

9. Løs ligningerne

$$\ln(x) = 4, \qquad 3\log_{10}(x) = \log_{10}(27), \qquad \ln(x) + \ln(x+2) = 3\ln(2)$$

10. Lad f være en eksponentialfunktion med halveringskonstant 7, som opfylder $f(3) = 12$.

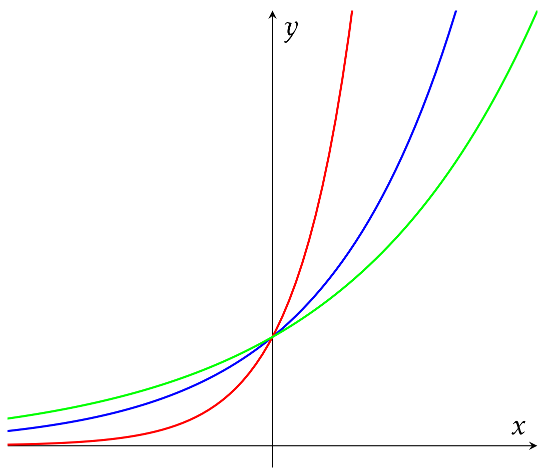
    (a) Bestem $f(-11)$

    (b) Bestem $f(10)$

    (c) Løs ligningen $f(x) = \frac{3}{2}$.

11. Funktionen $f(x) = a^x$ har fordoblingskonstanten $\ln(2^5)$. Bestem a.

12. Bestem a og b så $f(x) = b \cdot a^x$ går gennem punkterne $(1, e^3)$ og $(3, e^7)$.



Figur 1: Opgave 13

13. Figur 1 viser graferne for tre forskellige eksponentialfunktioner. Hvilken af disse har den største fordoblingskonstant?

14. Bestem halveringskonstanten for funktionen $f(x) = e^{-2x}$

EKSTRAOPGAVER:

15. Argumenter for, at det ikke giver mening at tage den naturlige logaritme af et negativt tal.

16. Givet en eksponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ bestem c og d så $g(x) = c \cdot d^x$ er spejlingen af f i y-aksen. (Hint: Symmetri om y-aksen er ensbetydende med at $f(-x) = g(x)$.)

17. Vis at

$$\frac{\ln(a^y)}{\ln(a)} = y, \quad \text{og} \quad a^{\frac{\ln(x)}{\ln(a)}} = x.$$

Konkluder at

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

(Hint: til at vise den anden lighed brug at $x = a^{\log_a(x)}$ på venstresiden.)