Facit til kursusgang 9: Funktioner 3 (polynomier)

1. Svarene er:
$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -7, \qquad g(-1) = 3, \qquad (f+g)(-2) = f(-2) + g(-2) = -24,$$
samt $x = \frac{1}{4}$.

2. Kun punktet $(2,4)$ ligger på grafen for h, da $h(2) = 4$ og $h(0) \neq 3$.

3. Skæringspunkterne er $(0,-1)$ og $(2,7)$

4. Svarene er:
   (a) Rød: g da hældningen for g er negativ og $g(2) = 2$.
   (b) Blå: f da $f(0) = -2$.
   (c) Grøn: h da hældningen for h er positiv og større end hældningen for f.

5. Hjørnepunkterne findes ved at bestemme skæringspunkterne mellem linjerne. Koordinatsættene til punkterne er: $(-\frac{11}{4}, -\frac{19}{4})$, $(2,0)$ og $(-\frac{16}{11}, \frac{19}{11})$.

6. Toppunktet er $(\frac{3}{4}, \frac{1}{8})$.

7. Størrelserne bestemmes ved at løse to ligninger med to ubekendte: $f(-1) = 3$ og $f(2) = -1$. resultatet bliver: $a = -\frac{4}{3}$, $b = \frac{5}{3}$.

8. Først løses ligningen $f(x) = h(x)$. De fundne x-værdier indsættet i forskriften for enten f eller h, hvorved y-koordinaterne til skæringspunkterne findes. Skæringspunkterne er $(-\frac{1}{2}, -2)$, $(0,-1)$, $(1,1)$.

9. Fortegnene er $a > 0$ (parablen er opadvendt), $c < 0$ (parablen skærer y-aksen over x-aksen) og $d > 0$ (parablen skærer x-aksen to steder.

10. Først løses ligningen $f(x) = g(x)$. De fundne x-koordinater indsættes i enten forskriften for f eller g for at bestemme y-koordinaterne. Skæringspunkterne er $(-1,2)$, $(0,2)$ og $(1,0)$.

11. Løs ligningen $2 \cdot x_0 - 3 = x_0$. Svaret er $x_0 = 3$.

12. Svarene er: $f(-2) = 22$ samt $x_0 = 10$ og $x_0 = \frac{2}{3}$. De to løsninger til ligningen $f(x_0) = x_0$ findes ved at løse ligningen $\frac{3}{4}{x_0}^2 - 7x_0 + 5 = x_0$.

13. Koefficienterne b og c bestemmes ved at løse to ligninger med to ubekendet: $f(-2) = 0$ og $f(3) = 0$. Svaret er $b = 1$ og $c = 6$.

EKSTRAOPGAVER:

14. Lad $f(x) = ax^2 + bx + c$ være et vilkårligt polynomium. Hvis f skal gå gennem punkterne $(-1,2)$, $(1,-1)$, $(2,4)$ kan vi opstille ligningerne

$$\begin{aligned} f(-1) &= = a - b + c = 2 \\ f(1) &= = a + b + c = -1 \\ f(2) &= 4a + 2b + c = 4, \end{aligned}$$

og få $a = \frac{13}{6}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = -\frac{5}{3}$. Dette giver at løsningen er $f(x) = \frac{13}{6}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{3}$.

15. Følgende udregning udregning giver resultatet:

$$\begin{aligned} g\left(\frac{-b}{2a_0}\right) &= -\frac{d}{4a_0} \Leftrightarrow \\ -a_0\left(\frac{-b}{2a_0}\right)^2 + c_0 &= -\frac{d}{4a_0} \Leftrightarrow \\ -\frac{b^2}{4a_0} + c_0 &= -\frac{d}{4a_0} \Leftrightarrow \\ \frac{-b^2}{4a_0} + \frac{4a_0c_0}{4a_0} &= -\frac{d}{4a_0} \Leftrightarrow \\ \frac{-(b^2 - 4a_0c_0)}{4a_0} &= -\frac{d}{4a_0} \Leftrightarrow \\ -\frac{b^2 - 4a_0c_0}{4a_0} &= -\frac{d}{4a_0}. \end{aligned}$$

16. Vær opmærksom på fortegnet foran b i forskriften for f. Benyt toppunktsformlen til at bestemme værdierne af b. Svarene er:

    (a) $0 < b < 2\sqrt{2}$.

    (b) $b < -2\sqrt{2}$.