## Opgaver til kursusgang 28: Differentialligninger 2

1. Løs differentialligningerne

$$y' = 3, \qquad y' = \sin(x), \qquad y' = e^{-2x},$$

   alle med begyndelsesbetingelser $y(0) = 2$.

2. Løs differentialligningerne

$$y' = 2x - 4, \qquad y' = \frac{1}{x} + x, \qquad y' + 2x = 3x^2,$$

   alle går gennem punktet $(1, 6)$.

3. Bestem løsningen til differentialligningen

$$y' = -y$$

   som går gennem punktet $(1, \frac{1}{e^2})$.

4. Differentialligningen

$$y' = \frac{x + 2y}{3},$$

   har en løsning som går gennem punktet $(1, 3)$. Bestem en ligning for tangenten til løsningen i dette punkt.

5. Løs følgende differentialligninger med begyndelsesbetingelser

   (a) $y' = 3x^3 - 1$, $y(0) = -1$.

   (b) $y' - y = 0$, $y(0) = \sqrt{2}$.

   (c) $3y' + y = 0$, $y'(0) = 1$.

6. Differentialligningen

$$y' = x - y^2,$$

   har en løsning som går gennem punktet $(3, 5)$. Bestem en ligning for tangenten til løsningen i dette punkt.

**EKSTRAOPGAVER**:

7. For at få en forståelse for hvordan løsningerne til en differentialligning kan se ud kan man tegne såkaldte linjeelementer. Måden man gør det på er ved at udvælge punkter og så for hvert punkt tegne en linje med samme hældning som løsningen vil have i punktet.

   I Figur 1 ses en skitse af linjeelementer tilhørende differentialligningen

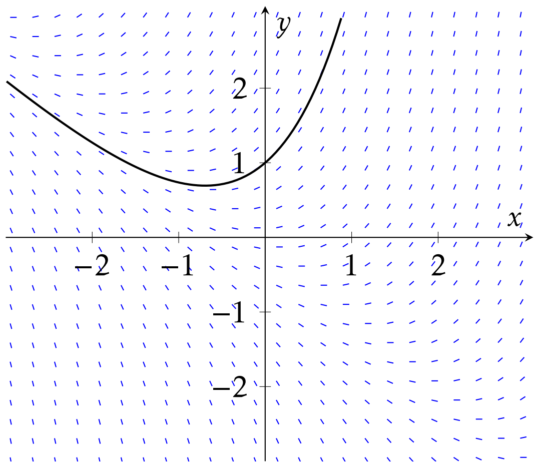
$$y' = x + y,$$

   samt grafen for løsningen med begyndelsesbetingelse $y(0) = 1$. Skitser grafen for løsningen med begyndelsesbetingelser

   (a) $y(0) = 0$.

   (b) $y(0) = -1$.

   (c) $y(0) = -2$.




Figur 1: Opgave 7

8. Differentialligningen

$$y' = \frac{x}{1+y^2},$$

   har en løsning som går gennem punktet $(4, 1)$. Bestem en ligning for tangenten til løsningen i dette punkt.

9. I opgave 13 fra 27. kursusgang så vi at den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' = ky$$

   er givet ved $y = ce^{kx}$ hvor $c \in \mathbf{R}$. Bestem løsninger som opfylder begyndelsesbetingelserne

   (a) $y(0) = a$.

   (b) $y'(0) = b$.

10. Differentialligningen

$$y' = 3\sqrt{xy},$$

har en løsning som går gennem punktet $(1,4)$. Bestem en ligning for tangenten til løsningen i dette punkt.

11. Differentialligningen

$$y' = \frac{y-1}{x},$$

har en løsning som går gennem punktet $(2,7)$. Bestem en ligning for tangenten til løsningen i dette punkt.

12. I Figur 2 ses en skitse af linjeelementer tilhørende differentialligningen

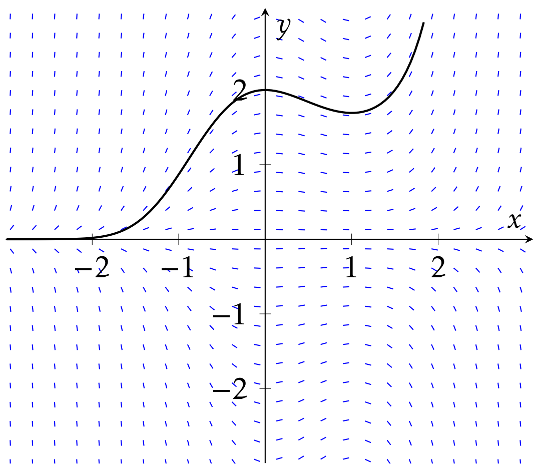
$$\frac{y'}{y} = x^2 - x,$$

samt grafen for løsningen med begyndelsesbetingelse $y(0) = 2$. Skitser grafen for løsningen med begyndelsesbetingelser

(a) $y(0) = 1$.

(b) $y(0) = -1$.

(c) $y(0) = -2$.




Figur 2: Opgave 12

13. Lad $f(x)$ være med en stamfunktion $F(x)$. Vis at funktionen

$$g(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x)\,dx$$

løser differentialligningen

$$y' = f,$$

med begyndelsesbetingelsen $y(x_0) = y_0$.