Facit til kursusgang 18: Vektorer i planen 1

1. Svarene er:

$$\begin{bmatrix} 6 \\ 9 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \sqrt{13}, \qquad \sqrt{5}, \qquad 4, \qquad 14.$$

2. Arealet er 19.

3. Svarene er:

   (a) $t = 11$.

   (b) $t = 1$ og $t = 3$.

4. Vinklen er $\frac{\pi}{6}$.

5. Svaret er:

$$\vec{u} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

6. Svarene er:

$$13, \qquad \begin{bmatrix} -6 \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad -22, \qquad 13, \qquad \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

7. Arealet er 0.

8. Svarene er:

   (a) $t = 4$ og $t = -1$.

   (b) $t = -6 \pm 2\sqrt{10}$.

EKSTRAOPGAVER:

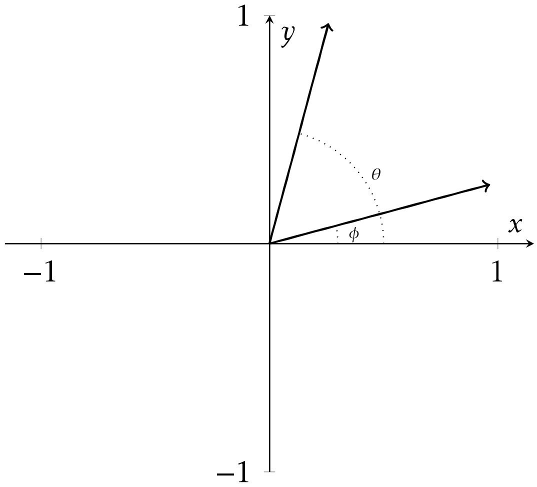
9. Svaret er: Alle vektorer på formen

$$t\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

hvor $t \in \mathbf{R}$.

10. Vi har at

$$\vec{u} \cdot \hat{\vec{u}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{bmatrix} = u_1(-u_2) + u_2 u_2 = 0.$$



Figur 7: Opgave 14

11. Vi har at

$$\begin{aligned}\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 = v_1u_1 + v_2u_2 = \vec{v}\cdot\vec{u},\\ -\det(\vec{v},\vec{u}) = -(v_1u_2 - v_2u_1) = u_1v_2 - u_2v_1 = \det(\vec{u},\vec{v}),\\ \|k\vec{u}\| = \sqrt{k^2u_1^2 + k^2u_2^2} = \sqrt{k^2}\sqrt{u_1^2+u_2^2} = |k|\|\vec{u}\|.\end{aligned}$$

12. Vi har at

$$\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\| = \sqrt{\frac{v_1^2}{\|\vec{v}\|^2} + \frac{v_2^2}{\|\vec{v}\|^2}} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\sqrt{v_1^2+v_2^2} = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = 1.$$

13. Bruger vi at $\cos(x) \in [-1,1]$ får vi at

$$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 = \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2\cos^2(\theta) \leq \|\vec{u}\|^2\|\vec{v}\|^2.$$

14. Svarene er:

    (a) Figur 7 viser at vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er $\theta - \phi$.

    (b) Da $\vec{u}$ og $\vec{v}$ begge har længden 1 giver formlen for vinklen mellem vektorer at

    $$\cos(\theta-\phi) = \vec{v}\cdot\vec{u} = \cos(\theta)\cos(\phi) + \sin(\theta)\sin(\phi).$$

    (c) Bruger vi formlen for determinanten får vi at

    $$\sin(\theta-\phi) = \det(\vec{v},\vec{u}) = \cos(\phi)\sin(\theta) - \sin(\phi)\cos(\theta).$$

    Bemærk at vi anvender $\det(\vec{v},\vec{u})$ da vinklen regnes fra $\vec{v}$ til $\vec{u}$.

15. Det ses at

$$\vec{u}\cdot\vec{u} = u_1^2 + u_2^2 = \|\vec{u}\|^2.$$

Bruger vi dette får vi at

$$\begin{aligned}\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 &= (\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v}) = (u_1+v_1)(u_1+v_1) + (u_2+v_2)(u_2+v_2)\\ &= u_1^2 + v_1^2 + 2u_1v_1 + u_2^2 + v_2^2 + 2u_2v_2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}).\end{aligned}$$

16. Bruger vi opgave 13 har vi at

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u}\cdot\vec{v}).$$

Fra uligheden i opgave 11 får vi at

$$(\vec{u}\cdot\vec{v}) \leq |\vec{u}\cdot\vec{v}| \leq \|\vec{u}\|\|\vec{v}\|.$$

Bruger vi denne ulighed i ligningen ovenfor får vi at

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\|\vec{u}\|\|\vec{v}\| = (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2.$$

Ved at tage kvadratroden på begge sider får vi den ønskede ulighed. Denne kaldes typisk for trekantsuligheden.

Facit til kursusgang 19: Vektorer i planen 2

1. Linjen l har parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

og ligning

$$3(x-1)+(y+6)=0.$$

Skæringspunkterne er $(-1,0)$ og $(0,-3)$.

2. Prikker man retningsvektoren for m med normalvektoren for l får man 0, hvorfor linjerne må være parallelle.

3. Indsætter vi x- og y-koordinaterne for linjen i cirklens ligning får vi

$$(3+t)^2+(-3-t)^2=2 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2+12t+18=2.$$

Løsningerne til denne ligning er $t=-4$ og $t=-2$. Indsætter vi disse værdier i linjens ligning får vi skæringspunkterne $(1,-1)$ og $(-1,1)$.

4. Linjens ligning er

$$2(x-1)+3(y+1)=0.$$

Hvordan ligger denne linje i forhold til linjen med parameterfremstilling. Prikker man normalvektoren for denne linje med retningsvektoren for den anden får man 0. Altså er de to linjer parallelle. Da de begge går gennem punktet $(7,5)$ må de være sammenfaldende.

5. Linjen har parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

Prikker man retningsvektoren for denne linje med normalvektoren for den anden får man 0. Dermed er linjerne parallelle. da $(-2,0)$ ligger på den ene linje men ikke den anden er de ikke sammenfaldende.

6. Prikker man retningsvektoren for denne linje med normalvektoren for den anden får man 31. Dermed er de to linjer ikke parallelle og de må have præcist et skæringspunkt. Indsætter vi koordinaterne fra parameterfremstillingen i linjens ligning får vi ligningen

$$3(7t-6)+2(5t-2)=9.$$

Løsningen er $t=1$ hvilket giver et skæringspunkt på $(1,3)$.

7. Svarene er:

   (a) $\vec{w}_1 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(b) $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

EKSTRAOPGAVER:

8. Først bestemmer vi cirklernes skæringspunkter. Ved at gange ud har de to ligninger formen

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y = 1, \qquad x^2 + 1 + 2x + y^2 + 1 + 2y = 5.$$

Trækker vi den første ligning fra den anden får vi

$$4x + 4y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 1.$$

Lægger vi de to cirklers ligninger sammen får vi

$$2x^2 + 4 + 2y^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Indsætter vi $x = 1 - y$ i denne ligning får vi

$$2y^2 - 2y = 0$$

hvilket giver at $y = 0$ og $y = 1$. Når $y = 0$ skal $x = 1$ og når $y = 1$ skal $x = 0$. Dermed har vi fundet skæringspunkterne $(0,1)$ og $(1,0)$. Parameterfremstillingen bliver så

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

9. De to linjer har retningsvektorer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Formlen for vinklen mellem vektorer giver at

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + (2 + \sqrt{3})^2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}.$$

Dermed ser vi at $\theta = \frac{\pi}{3}$.

10. Svarene er:

(a) Da trekanten er retvinklet følger det fra klassiske trigonometriske formler at

$$\cos(\theta) = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

(b) Vi har at $\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ hvilket kombineret med forrige formel giver at

$$\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|} = \cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

Ganger vi denne ligning igennem med $\|\vec{u}\|$ får vi at

$$\|\vec{w}\| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}. \tag{2}$$

(c) Da $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har samme retning gælder at

$$\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Isolerer vi $\vec{w}$ i denne ligning får vi

$$\vec{w} = \|\vec{w}\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

og bruger vi udtrykket for $\|\vec{w}\|$ i (2) får vi at

$$\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$

Facit til kursusgang 20: Vektorer i rummet 1

1. Svarene er:

$$\begin{bmatrix}21\\3\\12\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}-2\\1\\-8\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}9\\0\\12\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}5\\2\\-4\end{bmatrix},\qquad \sqrt{66},\qquad \sqrt{69},\qquad 45,\qquad \begin{bmatrix}12\\-48\\-9\end{bmatrix}$$

2. Nej

3. Løs ligningen:

$$\begin{bmatrix}-3\\-5\\2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}2\\-4\\t\end{bmatrix}=0$$

   Denne har løsningen $t=-7$.

4. Prikker vi vektorerne $\vec{u}+t\vec{v}$ og $\vec{u}-t\vec{v}$ får vi ligningen

$$0=4-t^2+4-4t^2+16-t^2=24-6t^2.$$

   Denne har løsningerne $t=\pm 2$.

5. Vi har at

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{bmatrix}-8\\5\\6\end{bmatrix},\quad \text{og}\quad \|\vec{u}\times\vec{v}\|=5\sqrt{5}.$$

6. Lad

$$\vec{u}=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3.\end{bmatrix}.$$

   Så er

$$\vec{u}\times\vec{u}=\begin{bmatrix}u_2u_3-u_2u_3\\-(u_1u_3-u_1u_3)\\u_1u_2-u_1u_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}.$$

7. Vi har at

$$\vec{u}\times t\cdot\vec{v}=t\begin{bmatrix}-3\\-2\\3\end{bmatrix},\quad \text{og}\quad \|\vec{u}\times t\vec{v}\|=|t|\sqrt{22}.$$

   Dermed har parallelogrammet areal 3 for $t=\pm\frac{3}{\sqrt{22}}$.

8. Svarene er

$$\begin{bmatrix}-2\\-6\\-4\end{bmatrix},\qquad 3\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix},\qquad 9,\qquad \begin{bmatrix}2\\6\\4\end{bmatrix},\qquad 3\begin{bmatrix}1\\-3\\-1\end{bmatrix},\qquad -18.$$

9. Vi har at

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 = v_1 u_1 + v_2 u_2 + v_3 u_3 = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

10. Vi har at

$$\|k\vec{u}\| = \sqrt{k^2 u_1^2 + k^2 u_2^2 + k^2 u_3^2} = \sqrt{k^2}\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} = |k|\|\vec{u}\|.$$

11. Bemærk først at $\vec{u} \cdot \vec{u} = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = \|\vec{u}\|^2$. Bruger vi dette får vi

$$\begin{aligned}
\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (u_1 + v_1)^2 + (u_2 + v_2)^2 + (u_3 + v_3)^2 \\
&= u_1^2 + v_1^2 + 2u_1 v_1 + u_2^2 + v_2^2 + 2u_2 v_2 + u_3^2 + v_3^2 + 2u_3 v_3 \\
&= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2(\vec{u} \cdot \vec{v}).
\end{aligned}$$

12. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}.$$

Så er

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{bmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{bmatrix}$$

og vi får

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = u_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + u_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + u_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0,$$

samt

$$\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = v_1(u_2 v_3 - u_3 v_2) + v_2(u_3 v_1 - u_1 v_3) + v_3(u_1 v_2 - u_2 v_1) = 0.$$

Facit til kursusgang 21: Vektorer i rummet 2

1. Parameterfremstillingen er:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

   Punktet P ligger ikke på linjen.

2. Ligningen for planen er

$$3(x-1) + 2(y+5) + 6(z-4) = 0.$$

3. Ved skiftevis at holde to af variablerne x, y, z lig 0 får vi skæringspunkterne $(0,0,12)$, $(0,-6,0)$ og $(3,0,0)$.

4. Indsætter vi koordinaterne for linjen i planens ligning får vi

$$\begin{aligned} 0 &= 3(1+t) - 2(-2-2t) + (2+4t) - 20 \\ &= 3 + 3t + 4 + 4t + 2 + 4t - 20 = 11t - 11. \end{aligned}$$

   Denne ligning har løsningen $t = 1$ og dermed bliver skæringspunktet $(2,-4,6)$.

5. Afstanden er $\sqrt{30}$

6. (a) Da $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ er linjens retningsvektor og planen normalvektor ortogonale. Derfor må linjen og planen være parallele.

   (b) Da linjen og planen er parallele, er afstanden fra et et hvert punkt på linjen til planen den samme. Derfor bestemmes afstanden ved at udvælge et vilkårligt punkt på linjen, f.eks $(2,-1,1)$, og bestemme afstanden mellem dette punkt og planen α.
   Afstanden er 2.

7. Da $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ udspænder vektorerne ikke en plan.

8. Hvis vi lægger de to ligninger sammen får vi at $3x = 3$ hvilket giver at $x = 1$. Ganger vi den første ligning igennem med 2 og trækker den fra den anden får vi ligningen

$$3y + 3z = 3.$$

   Isolerer vi for y får vi at $y = 1 - z$ og hvis vi skriver $t = z$ får vi parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

EKSTRAOPGAVER:

9. Svarene er

   (a) Vi har at

   $$\vec{v} \times \vec{v} = 4\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

   hvorfor planens ligning bliver

   $$x - 2y + 2z = 0.$$

   (b) Arealet er 12.

   (c) Krydsproduktet for normalvektorerne til P og Q er

   $$\begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

   og for at planerne kan være parallelle eller sammenfaldende skal dette krydsprodukt være $\vec{0}$.

   (d) Indsætter vi linjens koordinater i venstresiden af ligningen for P får vi

   $$\frac{2}{7} - 10t - 2(\frac{1}{7} + 2t) + 2(7t) = 0$$

   hvilket viser at linjen er indehold i P. Gør vi det samme for Q får vi

   $$2(\frac{2}{7} - 10t) + 3(\frac{1}{7} + 2t) + 2(7t) = 1.$$

   Altså ligger linjen både i P og Q.

10. Vi har at

$$\vec{w} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Facit til kursusgang 22: Ubestemte integraler 1

1. Svaret kan være $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2x$.

2. Svaret er $F(x) = 2x^4 - \cos(x) + c$

3. Svarene er:

$$\frac{1}{3}x^3 + x^2 + c, \qquad 3(e^x + \cos x) + c, \qquad e^{2x} - \ln x + c.$$

4. Svarene er:

$$2\ln(x) + \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^2 + c, \qquad x^{\frac{5}{2}} + \frac{1}{2}\frac{1}{x^2} + c, \qquad c$$

5. Svaret er $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$.

6. Vi har at

$$F'(x) = \frac{3}{5}\frac{10}{3}x^{\frac{10}{3}-1} = 2x^{\frac{7}{3}} = f(x).$$

7. $F(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}$.

8. $F(x) = 4x \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 - 15$

9. $F(x) = \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + \frac{3}{2}x^{\frac{4}{3}} + \sqrt{2}$.

EKSTRAOPGAVER:

10. Da

$$\frac{d}{dx}x\ln x = \ln(x) + 1$$

er f ikke en stamfunktion til $\ln x$.
$x\ln(x) - x$ er en stamfunktion til $\ln x$.

11. Svarene er:

    (a) Da $f+g=e^x$ er $f+g$ en stamfunktion til sig selv.

    (b) Vi har at

    $$f'(x)=\frac{1}{2}(e^x-(-1)e^{-x})=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=g(x).$$

    (c) Ja.

    (d) Vi har at

    $$\frac{d}{dx}\ln(g(x))=\frac{1}{g(x)}g'(x)=\frac{f(x)}{g(x)}.$$

12. Vi har at

    $$\begin{aligned}F'(x)&=-(1-x)^{-2}(-1)=(1-x)^{-2}=\frac{1}{(1-x)^2}\\ G'(x)&=(1-x)^{-1}+x(1-x)^{-2}=\frac{1}{1-x}+\frac{x}{(1-x)^2}=\frac{1}{(1-x)^2}.\end{aligned}$$

    Yderligere er $F(x)-G(x)=1$.

Facit til kursusgang 23: Ubestemte integraler 2

1. Svarene er:

$$(x-1)e^x + c, \qquad \frac{1}{2}x^2e^{2x} - \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} + c$$

2. Svarene er:

$$\sin(x) - (1+x)\cos(x) + c, \qquad (2x-3)e^x + c.$$

3.

$$\begin{aligned} F(x) = \int (9x-3)e^{3x}\,dx = (9x-3)\frac{1}{3}e^{3x} - \int 9\frac{1}{3}e^{3x}\,dx + c \\ &= (3x-1)e^{3x} - 9\frac{1}{9}e^{3x} + c \\ &= (3x-1)e^{3x} - e^{3x} + c \\ &= (3x-2)e^{3x} + c \end{aligned}$$

Svaret er

$$F(x) = (3x-2)e^{3x} + 10$$

4. Vi har at

$$\int \ln x\,dx = x\ln(x) - \int \frac{x}{x}\,dx = x\ln(x) - x + c.$$

5. Vi har at

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \ln(x)^2 - \int \frac{\ln x}{x}\,dx.$$

Isolerer vi for $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ får vi at

$$\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$$

hvor vi har lagt c til for at få samtlige stamfunktioner.

6. Anvender vi formlen for delvis integration to gange fås

$$\begin{aligned} \int e^x\sin(x)\,dx &= e^x\sin(x) - \int e^x\cos(x)\,dx \\ &= e^x\sin(x) - e^x\cos(x) - \int e^x\sin(x)\,dx. \end{aligned}$$

Isolerer vi $\int e^x\sin(x)\,dx$ får vi at

$$\int e^x\sin(x)\,dx = \frac{e^x}{2}(\sin(x) - \cos(x)) + c,$$

hvor konstanten er lagt til for at få alle stamfunktioner.

7. Vi har at

$$\int x^2\ln x\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{1}{9}x^3 + C.$$

EKSTRAOPGAVER:

8. Lad f og g være vilkårlige funktioner. Produktreglen giver at

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

Isolerer vi $f'(x)g(x)$ og integrerer begge sider får vi

$$\int f'(x)g(x)\,dx = \int (fg)'(x)\,dx - \int f(x)g'(x)\,dx.$$

Da stamfunktionen til $(fg)'(x)$ er $(fg)(x)$ får vi at

$$\int f'(x)g(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,dx$$

og hvis vi erstatter f med en stamfunktion F får vi at

$$\int f(x)g(x)\,dx = F(x)g(x) - \int F(x)g'(x)\,dx.$$

9. Vi får at

$$\begin{aligned}\int \ln^2(x)\,dx &= \ln(x)(x\ln(x) - x) - \int \ln(x) - 1\,dx \\ &= x\ln^2(x) - x\ln(x) - (x\ln(x) - x - x) + c \\ &= x\ln^2(x) - 2x\ln(x) + 2x + c.\end{aligned}$$

10. Svarene er:

$$\frac{1}{4}x^2(2\ln(x) - 1) + c, \qquad \frac{1}{27}e^{3x+1}(9x^2 - 6x + 2) + c, \qquad e^x\ln(x) + c$$