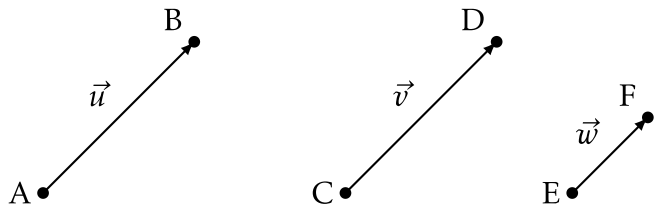
18. Kursusgang: Vektorer i planen 1

Vi er nu kommet til vektorer. En vektor er defineret ved at den har en længde og en retning, ofte tegnet som en pil (se Figur 1 hvor $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ er vektorer). Da vi kun er interesseret i en vektors længde og retning har vi at vektorerne $\vec{u}$ og $\vec{v}$ i Figur 1 er ens, da de har samme længde og samme retning, selvom de ikke er bestemt af de samme punkter.



Figur 1: Vektorer.

Vi vil starte ud med at studere 2-dimensionelle vektorer, som vi kan tænke på som værende punkter i et 2-dimensionalt koordinatsystem. Vi noterer en sådan vektor ved

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Af hensyn til notationsformen i linær algebra vælges kantede parenteser i stedet for,

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

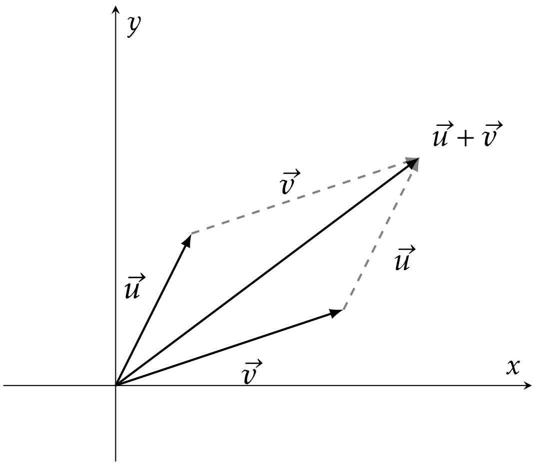
Regneregler: Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, så har vi har følgende regneregler for vektorer.

1. $\vec{u} \pm \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \pm x_2 \\ y_1 \pm y_2 \end{bmatrix}$.
2. $c\vec{u} = c\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cx_1 \\ cy_1 \end{bmatrix}$, hvis $c \in \mathbb{R}$.
3. Længden af $\vec{u}$ noteres $||\vec{u}||$ og er givet ved $||\vec{u}|| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$

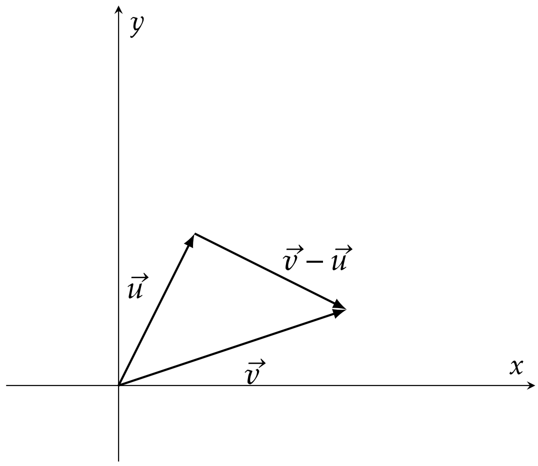
Af hensyn til notationsformen i linær algebra anvendes $||\vec{u}||$ for længden af en vektor. For en illustration af hvad det vil sige at lægge to vektorer sammen og trække to vektorer fra hinanden se Figur 2 og 3. Bemærk, at hvis en vektor ganges med en skalar, så forlænges (forkortes) vektoren med tallet, og hvis tallet er negativ, så ændrers også retningen, så vektoren går i den modsatte retning.

Hvis vi får givet to punkter i vores koordinatsystem $A = (x_1, y_1)$ og $B = (x_2, y_2)$, og vi gerne vil bestemme vektoren fra A til B, så er den givet ved

$$\overrightarrow{AB} = \begin{bmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{bmatrix}.$$



Figur 2: $\vec{u}+\vec{v}$.



Figur 3: $\vec{v}-\vec{u}$.

Det betyder, at hvis O er origo i vores koordinatsystem og $A=(x,y)$ så er vektoren fra origo til A givet ved

$$\overrightarrow{OA}=\begin{bmatrix} x-0 \\ y-0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Vi kalder vektoren, der går fra origo til A for stedvektoren til A, betegnes $\overrightarrow{0A}$. Da vi kun er interesseret i længden og retningen for en vektor og ikke de to punkter den går mellem, så vil vi som udgangspunkt tænke på en vektor som værende stedvektoren. Bemærk, at $\overrightarrow{OA}$ og A har de samme koordinater, og derfor kan man både tænke på en vektor som et objekt med en længde og en retning, men også som et punkt i et koordinatsystem.

Eksempler:

1. Lad $\vec{u}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{v}=\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ og udregn $\vec{u}+\vec{v}$ og $\vec{v}-\vec{u}$:

   Vi benytter regneregel 1. og får

$$\vec{u}+\vec{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3+7 \\ 2+1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 10 \\ 3 \end{bmatrix}.$$
$$\vec{v}-\vec{u}=\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7-3 \\ 1-2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

2. Lad $\vec{u}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ og udregn $3\vec{u}$:

   Vi benytter regneregel 2. og får

$$3\vec{u}=3\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3\cdot 1 \\ 3\cdot 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

3. Lad $\vec{u}=\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$ og udregn $\|\vec{u}\|$:

Vi benytter regneregel 3. og får

$$||\vec{u}|| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5.$$

Prikprodukt (eller skalarproduktet): Vi definerer prikproduktet mellem to vektorer $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ til at være

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = x_1 x_2 + y_1 y_2. \tag{1}$$

Bemærk, at prikproduktet af to vektorer er et tal og ikke en vektor, og at der ikke kan ganges to vektorer sammen, de prikkes sammen (så prikken mellem de to vektorer er ikke et gangetegn, men tegnet for et prikprodukt)!

Ved at benytte prikproduktet kan vi udregne vinklen θ mellem to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ ved brug af formlen

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||}. \tag{2}$$

Hvis prikproduktet $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, så har vi at

$$\cos(\theta) = 0,$$

hvilket betyder at θ er lig enten $\frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$. Hvis vinklen mellem to vektorer er $\frac{\pi}{2}$ eller $\frac{3\pi}{2}$, så siger vi at de to vektorer er ortogonale (vinkelrette). Dermed har vi at

$$\vec{u} \perp \vec{v} \qquad \text{hvis og kun hvis} \qquad \vec{u} \cdot \vec{v} = 0,$$

hvor $\perp$ betyder at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale.

Hvis der gives en vektor $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$, og der skal findes en vektor, som står ortogonalt på $\vec{u}$, så kan det gøres ved at finde tværvektoren til $\vec{u}$, som er givet ved

$$\widehat{\vec{u}} = \begin{bmatrix} -y_1 \\ x_1 \end{bmatrix}.$$

I kommer selv i opgaveregningen til at vise at $\vec{u}$ og $\widehat{\vec{u}}$ faktisk er ortogonale.

Determinant: Det næste vi vil betragte er determinanten af to vektorer. Hvis $\vec{u} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ så er determinanten af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ givet ved

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1. \tag{3}$$

Bemærk igen, at determinanten af to vektorer er et tal.

Ligesom ved prikproduktet kan vi også benytte determinanten mellem to vektorer $\vec{u}$ og $\vec{v}$ til at bestemme vinklen i mellem dem ud fra formlen

$$\sin(\theta) = \frac{\det(\vec{u}, \vec{v})}{||\vec{u}||||\vec{v}||}. \tag{4}$$

Hvis determinanten $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, så har vi at

$$\sin(\theta) = 0,$$

hvilket betyder at θ er lig enten 0 eller π. Hvis vinklen mellem to vektorer er 0 eller π, så siger vi at de to vektorer er parallelle. Dermed har vi at

$$\vec{u} \parallel \vec{v} \qquad \text{hvis og kun hvis} \qquad \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0,$$

hvor $\parallel$ betyder at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle.

Derudover har vi, at absolutværdien af determinanten af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er lig med arealet af det parallelogram, der er udspændt af $\vec{u}$ og $\vec{v}$ (se Figur 2), altså

$$A = |\det(\vec{u}, \vec{v})|,$$

hvor A er arealet af det udspændte parallelogram.

Eksempler:

1. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix}$ og udregn $\vec{u} \cdot \vec{v}$ og $\det(\vec{u}, \vec{v})$:

   Vi benytter (1) og (3) til at finde henholdsvis prikproduktet og determinanten

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \cdot 7 + 2 \cdot 1 = 21 + 2 = 23.$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 - 2 \cdot 7 = 3 - 14 = -11.$$

2. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$ og udregn vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$:

   Vi kan udregne vinklen enten ved at benytte (2) eller (4). Vi vælger at benytte (2), så vi finder først prikproduktet og længden af de to vektorer

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 + 1 \cdot -1 = -1$$

$$||\vec{u}|| = \sqrt{0^2 + 1^2} = \sqrt{1} = 1$$

$$||\vec{v}|| = \sqrt{0^2 + (-1)^2} = \sqrt{1} = 1.$$

   Dermed har vi, at

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \frac{-1}{1 \cdot 1} = \frac{-1}{1} = -1.$$

   Dvs. at vinklen mellem $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er den vinkel, der opfylder at $\cos(\theta) = -1$ og vi husker, at det gør $\theta = \pi$.

3. Lad $\vec{u} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og bestem om $\vec{u} \perp \vec{v}$ eller $\vec{u} \parallel \vec{v}$:

   Vi udregner prikproduktet og determinanten af de to vektorer

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 = 0$$
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1.$$

   Da $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ men $\det(\vec{u}, \vec{v}) \neq 0$, har vi at $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er ortogonale men ikke parallelle.