Facit til kursusgang 16: Tangenter og monotoni

1. Det ses let at $f'(x) = 4x - 2$ så $f'(x) = 0$ har løsningen $x = \frac{1}{2}$. Vælger vi punkterne $x_1 = 0$ og $x_2 = 1$ ser vi at $f'(x_1) = -2$ og at $f(x_2) = 2$. Dette giver monotonilinjen som ses i Tabel 1. Vi ser dermed at f er aftagende i intervallet $]-\infty, \frac{1}{2}]$ og voksende i intervallet $[\frac{1}{2}, \infty[$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	-2	0	2
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Tabel 1: Opgave 1.

2. Ved at differentiere får vi at $f'(x) = 9x^2 + 6x + 1$ og løser vi ligningen $f'(x) = 0$ får vi at $x = -\frac{1}{3}$. Vi ser også at $f'(-1)) = 4$ og at $f'(0) = 1$. Dermed har vi at f er voksende på hele den reelle akse med en vendetangent i punktet $x = -\frac{1}{3}$. I Tabel 2.

x	-1	$-\frac{1}{3}$	0
$f'(x)$	4	0	1
$f(x)$	$\nearrow$		$\nearrow$

Tabel 2: Opgave 2.

3. Tangentligningen er $y = 9(x-1) + 5 = 9x - 4$.

4. Svarene er: $f'(0) < 0$, $f'(2) > 0$ og $f'(1) = 0$.

5. Tangentligningen er $y = x - 1$.

6. Ligningen $f'(x) = 10$ giver løsningen $x = 2$.
   Nu beregnes:
$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
   Hvilket giver facit:
$$y = 10x + 14$$

7. Ligningen $f'(x) = 6$, giver løsningerne $x = -1 \vee x = 2$.
   Nu beregnes:
$$y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$$
$$y = f'(2)(x-2) + f(2)$$
   Hvilket giver facit:
$$y = 6x + 11$$
$$y = 6x - 16$$

8. Tangentligningen er givet ved $y = \frac{1}{2}(x-2)+4$. Sætter vi $y = 0$ og løser ligningen får vi at $x = -6$.

9. Ligningen $f'(x) = 2$ har løsningen $x = -\frac{1}{3}$ og tangentligningen i $(-\frac{1}{3}, f(-\frac{1}{3}))$ er $y = 2(x+\frac{1}{3}) + \frac{4}{9} = 2x + \frac{10}{9}$.

EKSTRAOPGAVER:

10. Da f er symmetrisk giver kædereglen at
$$f'(-x) = -f'(x).$$
Derfor bliver tangentligningen $y = -2(x+1) - 1 = -2x - 3$

11. Tangentligningen er $y = f'(g(-3)) \cdot g'(-3) \cdot (x+3) + f(g(-3)) = -2x - 4$.

12. Funktionen er konstant.

13. For at bestemme tangentligningerne for tangenterne til f som går gennem punktet $(\frac{5}{4}, 0)$ skal vi bestemme hvilke punkter på grafen tangenterne går gennem. Hvis vi vælger et vilkårligt punkt $(a, f(a))$ på grafen så er tangentligningen gennem punktet givet ved
$$y = f'(a) \cdot (x-a) + f(a) = (2a-4) \cdot (x-a) + (2-a)^2 + 1 = 2ax - 4x - a^2 + 5.$$
Indsætter vi punktet $(\frac{5}{4}, 0)$ i denne ligning får vi at
$$0 = \frac{5}{2}a - a^2.$$
Løsningerne er $a = 0$ og $a = \frac{5}{2}$. Indsættes dette i ligningen for tangenten får vi at
$$\begin{aligned} y_1 &= -4(x-0) + 5 = -4x + 5, \\ y_2 &= 1(x - \frac{5}{2}) + \frac{5}{4} = x - \frac{5}{4}. \end{aligned}$$