Facit til kursusgang 8: Funktioner 2 (sammensat og invers)

1. Svarene er:

   (a) $f(g(2)) = f(4) = 1$
   (b) $g(f(1)) = g(2) = 4$
   (c) $g(f(f(4))) = g(f(1)) = g(2) = 4$

2. Svarene er $(f \circ g)(x) = 12x^2 + 6x - 3$ og $(g \circ f)(x) = 36x^2 + 6x - 1$.

3. Svaret er:

$$f^{-1}(4) = 2, \quad f^{-1}(5) = 3, \quad f^{-1}(8) = 1.$$

4. Svarene er:

   (a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 4$
   (b) $g^{-1}(x) = e^x - 3$
   (c) $h^{-1}(x) = \frac{1-4x}{x+2}$

   Svaret i c) kan fås ved følgende udregninger:

$$x = \frac{1-2y}{y+4} \Leftrightarrow x \cdot (y+4) = 1 - 2y \Leftrightarrow xy + 4x = 1 - 2y \Leftrightarrow$$
$$xy + 2y = 1 - 4x \Leftrightarrow (x+2) \cdot y = 1 - 4x \Leftrightarrow y = \frac{1-4x}{x+2}$$

5. Nej.

6. Svarene er:

   (a) Rød: $\cos(x)^2$ fordi funktionsværdien er ikke-negativ.
   (b) Blå: $\cos(x^2)$.

7. Svarene er:

   (a) $(f \circ g)(x) = \sqrt{\frac{1}{1+x}} = \frac{\sqrt{1}}{\sqrt{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$,
   (b) $(g \circ f)(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$,
   (c) $(h \circ g)(x) = x^2$,
   (d) $(g \circ g)(x) = \frac{1}{1+\frac{1}{1+x}} = \frac{1}{\frac{1+x}{1+x} + \frac{1}{1+x}} \frac{1}{\frac{1+x+1}{1+x}} = \frac{1}{\frac{x+2}{1+x}} = \frac{x+1}{x+2}$.

8. Svaret er $f^{-1}(x) = f(x)$.

9. Simple udregninger giver at

$$(f \circ g)(x) = \frac{\frac{x+1}{1+2x} - 1}{1 - 2\frac{x+1}{1+2x}} = \frac{\frac{-x}{1+2x}}{\frac{-1}{1+2x}} = x,$$

   og

$$(g \circ f)(x) = \frac{\frac{x-1}{1-2x} + 1}{1 + 2\frac{x-1}{1-2x}} = \frac{\frac{-x}{1-2x}}{\frac{-1}{1-2x}} = x.$$

10. Svarene er:

    (a) Man kan vælge $g(x) = \cos x$ og $h(x) = (x-2)^2$.
    (b) Man kan vælge $g_1(x) = \cos(x^2)$ og $h_1(x) = x - 2$.
    (c) Man kan vælge $f_1(x) = \cos x$, $f_2(x) = x^2$ og $f_3(x) = x - 2$.

11. Tag eksempelvis $g(x) = e^x$ og $h(x) = x^2$.

EKSTRAOPGAVER:

12. Svarene er:

    (a) $f \circ g \colon [-2, \infty[\to [-2, \infty[$ og $(f \circ g)(x) = x$.
    (b) Funktionerne er ikke hinandens inverse da f ikke er injektiv.
    (c) Tag $D = [0, \infty[$.

13. Svarene er:

    (a) $D(h) = [1, \infty[$.
    (b) Simple udregninger giver

    $$(g \circ (f \circ h))(x) = ((x-1)^{\frac{3}{2}})^{\frac{2}{3}} + 1 = x - 1 + 1 = x,$$

    og

    $$((f \circ h) \circ g)(x) = ((x^{\frac{2}{3}} + 1) - 1)^{\frac{3}{2}} = x.$$