10. Kursusgang: Funktioner 4 (eksponentiel og logaritme-funktioner)

Vi definerer logaritmen $\log_a\colon\,]0,\infty[\to\mathbb{R}$ ved at sige

$$\log_a(x) = y \quad \text{hvis og kun hvis} \quad a^y = x,$$

hvor $a > 0$ kaldes for grundtallet af logaritmefunktionen. Det skal forstås således at $\log_a(x)$ giver det tal, som a skal opløftes i for at give x. Hvis grundtallet $a = e$, hvor e er Eulers tal, så skriver vi $\ln(x)$ i stedet for $\log_e(x)$ og kalder det for den naturlige logaritme. Bemærk, at ud fra den måde vi definerede $\log_a(x)$ har vi, at

$$\log_a(a^y) = y \qquad \text{og} \qquad a^{\log_a(x)} = x. \tag{1}$$

Eksempler:

1. Udregn $\log_2(8)$:

   For at udregne $\log_2(8)$ skal vi finde et y som opfylder at $2^y = 8$, hvilket vi ser er $y = 3$. Derfor har vi at $\log_2(8) = 3$.

2. Udregn $\log_{10}(10000)$:

   Vi ser at $10000 = 10^4$ hvilket medfører at $\log_{10}(10000) = 4$.

3. Udregn $\log_a(1)$:

   Vi har for alle a, at $a^0 = 1$, hvilket betyder, at $\log_a(1) = 0$, lige meget hvad grundtallet a er.

Regneregler: Vi har følgende regneregler for logaritmefunktioner:

1. $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$.
2. $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$.
3. $\log_a(x^r) = r\log_a(x)$.

Eksempler:

1. Udregn $\log_2(16)$:

   Vi ser at

   $$\log_2(16) = \log_2(2\cdot 8) = \log_2(2) + \log_2(8) = \log_2(2^1) + \log_2(2^3) = 1 + 3 = 4.$$

2. Udregn $\log_{10}(50) + \log_{10}(20)$:

   Vi kan ikke umiddelbart regne de to logaritmer, da vi ikke kan finde to pæne tal x, y, som opfylder at $10^x = 50$ og $10^y = 20$, men hvis vi bruger vores regneregler ser vi at

   $$\log_{10}(50) + \log_{10}(20) = \log_{10}(50\cdot 20) = \log_{10}(1000) = \log_{10}(10^3) = 3.$$

Eksponentialfunktioner: En funktion på formen

$$f(x) = a^x,$$

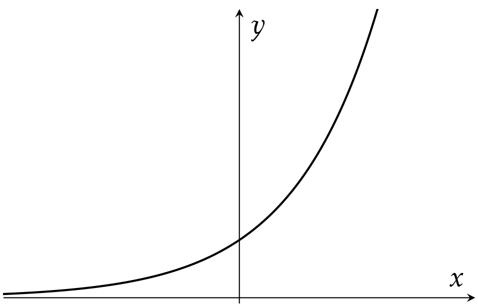
hvor $a > 0$ kaldes for en eksponentialfunktion. Vi husker fra opgaveregningen, at hvis $a > 1$ så er $f(x)$ en voksende funktion, hvis $a = 1$ så er $f(x)$ en konstant funktion, og hvis $0 < a < 1$ så er $f(x)$ en aftagende funktion.

Hvis vi får givet et punkt (x, y), kan vi, ligesom vi gjorde med førstegradspolynomier, bestemme forskriften for den eksponentialfunktion, der går gennem disse punkter. Det kan vi gøre ved at bruge formlen

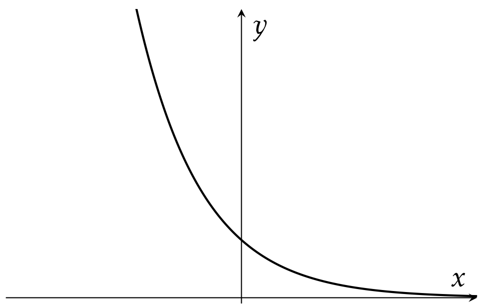
$$a = \sqrt[x]{y}.$$

En anden ting interessant ting, der kan bestemmes ud fra en eksponentialfunktion, såfremt denne er voksende, er dens fordoblingskonstant, som vi vil notere med T_2. Hvis vi har et punkt (x_0, y_0), så fortæller fordoblingskonstanten, hvor langt ud af x-aksen vi skal gå fra x_0 for at vores tilhørende y-værdi, som startede i y_0, er blevet dobbelt så stor. Fordoblingskonstanten er givet ud fra formlen

$$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(a)}.$$



Figur 1: Voksende eksponentialfunktion.



Figur 2: Aftagende eksponentialfunktion.

Hvis vores eksponentialfunktion derimod er aftagende, kan vi i stedet bestemme dens halveringskonstant, som vi vil notere med $T_{1/2}$. Halveringskonstanten er givet ved

$$T_{1/2} = \frac{\ln(\frac{1}{2})}{\ln(a)}.$$

Når vi betragter fordoblings- og halveringskonstanter, så er vi kun interesseret i, hvordan funktionen vokser/aftager. Det betyder, at en funktion givet ved $f(x) = ba^x$, har samme fordoblingskonstant/halveringskonstant som $f(x) = a^x$, da det at gange med en konstant ikke ændrer noget ved, hvordan funktionen vokser/aftager.

Bemærk, at vi ud fra (1) kan se, at logaritmefunktionen med grundtal a og eksponentialfunktionen med grundtal a er hinandens inverse.

Eksempler:

1. Bestem forskriften for den eksponentialfunktion der går gennem punktet $(4, 16)$:
   Vi indsætter i vores formel og får
   $$a = \sqrt[x]{y} = \sqrt[4]{16} = 2,$$
   hvilket medfører at forskriften for eksponentialfunktionen er $f(x) = 2^x$.

2. Bestem fordoblingskonstanten for eksponentialfunktionen $f(x) = 2^x$:

   Vi ser at $a = 2$ og indsætter i formlen for fordoblingskonstanten

   $$T_2 = \frac{\ln(2)}{\ln(2)} = 1,$$

   hvilket betyder at hver gang vi går en ud af x-aksen så fordobles vores y-værdi.

3. Løs ligningen $\ln(2x) = \ln(2) + 3$:

   Vi isolerer x på venstre side ved at samle logaritmen og så bruge at e^x er den inverse til $\ln(x)$:

   $$\begin{aligned} \ln(2x) = \ln(2) + 3 &\Leftrightarrow \ln(2x) - \ln(2) = 3 \\ &\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2x}{2}\right) = 3 \\ &\Leftrightarrow \ln(x) = 3 \\ &\Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^3 \\ &\Leftrightarrow x = e^3. \end{aligned}$$