Facit til kursusgang 12: Grænseværdi og kontinuitet

1. Svarene er: $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$ og $f(1) = 6$, hvorfor f er ikke kontinuert.

2. Svarene er: $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$ så f er kontinuert da $f(2) = 7$.

3. Grænsen eksisterer og er lig 1 fra både højre og venstre.

4. Svarene er: $f(1) = 2$ samt at f er ikke kontinuert i 1 da $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 3$ og $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$.

5. Svarene er: $a = 5$ og $b = 3$.

6. Svarene er:
   (a) $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
   (b) Da $\lim_{x\to 0} = 2$ og $f(0) = 1$ er funktionen ikke kontinuert når $a = 0$.

7. Svarene er:

$$0, \qquad 6e^4, \qquad \ln\frac{1}{2}.$$

8. Svarene er:

$$9, \qquad -1, \qquad -4, \qquad \frac{-2}{3}$$

9. Svarene er:

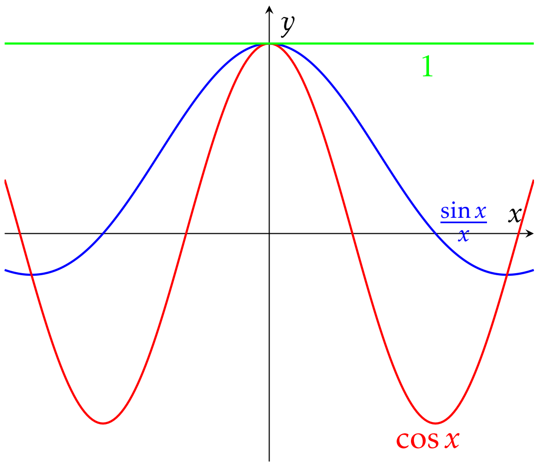
$$0, \qquad -6$$

EKSTRAOPGAVER:

10. Svarene er: $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1$ og $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -1$. Funktionen f er kontinuert i alle punkter undtagen 0.

11. Svarene er:
    (a) $(f+g)(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^+}(f+g)(x) = 0$ og $\lim_{x\to 0^-}(f+g)(x) = 0$. Funktionen $(f+g)$ er kontinuert i alle punkter.
    (b) $(fg)(0) = 0$, $\lim_{x\to 0^+}(fg)(x) = -1$ og $\lim_{x\to 0^-}(fg)(x) = -1$. Funktionen (fg) er kontinuert i alle punkter undtagen 0.

12. Svarene kan være:



Figur 1: Funktionen $\frac{\sin x}{x}$ "klemmes" af 1 og $\cos x$.

(a) Arealet af ΔABD er givet ved $\frac{1}{2}\sin(x)$ da grundlinjen i trekanten er 1. Arealet af enhedcirklen er π så da det grå cirkeludsnit udgør $\frac{x}{2\pi}$ af hele cirklen må dets areal være $\pi\frac{x}{2\pi} = \frac{x}{2}$. Arealet af ΔACD er givet ved $\frac{1}{2}\tan x$ da grundlinjen i cirklen er 1. Det er klart at ΔADB har areal mindre end det grå cirkeludsnit som så har areal mindre end ΔACD. Dette giver den ønskede ulighed

$$\frac{1}{2}\sin x \leq \frac{1}{2}x \leq \frac{1}{2}\tan x.$$

(b) Ved at gange uligheden med 2 og dividere med $\sin x$ får vi

$$1 \leq \frac{x}{\sin x} \leq \frac{1}{\cos x}. \tag{1}$$

Bemærk at vi har brugt at $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Hvis vi ganger den første ulighed i (1) igennem med $\frac{\sin x}{x}$ får vi at

$$\frac{\sin x}{x} \leq 1. \tag{2}$$

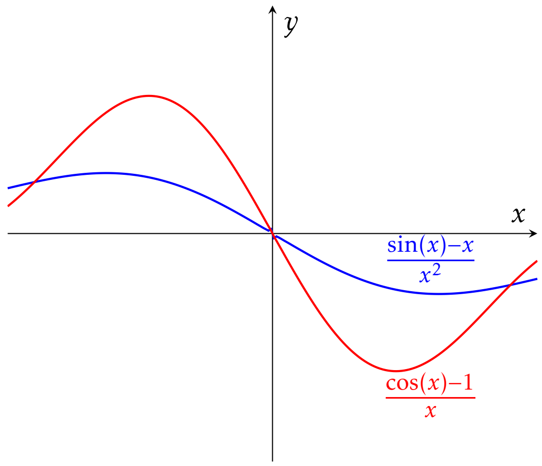
Ganger vi den anden ulighed i (1) igennem med $\frac{\sin(x)\cos(x)}{x}$ får vi at

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x}. \tag{3}$$

Kombinerer vi (2) og (3) får vi den ønskede ulighed

$$\cos(x) \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1. \tag{4}$$

(c) Fra (4) ses at $\frac{\sin x}{x}$ ligger mellem $\cos x$ og 1. Når x går mod 0 går $\cos x$ mod 1 og da uligheden gælder for alle x tæt på nul må $\frac{\sin x}{x}$ nødvendigvis også gå mod 1. Man kan se det som at $\frac{\sin x}{x}$ bliver klemt sammen af $\cos x$ og 1 omkring punktet $x = 0$ (se evt. Figur 1).



Figur 2: Funktionen $\frac{\sin(x)-x}{x^2}$ "klemmes" af 0 og $\frac{\cos x - 1}{x}$.

13. Hvis vi benytter os af hintet får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)\left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1+\cos x}\right) = \frac{\sin 0}{1+\cos 0} = 0.$$

14. Hvis vi trækker 1 fra på alle sider af ulighederne i (4) og dividerer med $x \neq 0$ får vi at

$$\cos(x) - 1 \leq \frac{\sin x}{x} - 1 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\cos(x)-1}{x} \leq \frac{\sin(x)-x}{x^2} \leq 0.$$

Vi ved fra Opgave 13 at

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0,$$

så igen giver et klemmeargument at $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0$ (se evt. Figur 2).

15. Hvis vi benytter os af hintet får vi

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right)^2 \left(\lim_{x\to 0} \frac{1}{1+\cos x}\right) = \frac{1}{1+\cos 0} = \frac{1}{2}.$$