Facit til kursusgang 19: Vektorer i planen 2

1. Linjen l har parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

   og ligning

$$3(x-1) + (y+6) = 0.$$

   Skæringspunkterne er $(-1, 0)$ og $(0, -3)$.

2. Prikker man retningsvektoren for m med normalvektoren for l får man 0, hvorfor linjerne må være parallelle.

3. Indsætter vi x- og y-koordinaterne for linjen i cirklens ligning får vi

$$(3+t)^2 + (-3-t)^2 = 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2t^2 + 12t + 18 = 2.$$

   Løsningerne til denne ligning er $t = -4$ og $t = -2$. Indsætter vi disse værdier i linjens ligning får vi skæringspunkterne $(1, -1)$ og $(-1, 1)$.

4. Linjens ligning er

$$2(x-1) + 3(y+1) = 0.$$

   Hvordan ligger denne linje i forhold til linjen med parameterfremstilling. Prikker man normalvektoren for denne linje med retningsvektoren for den anden får man 0. Altså er de to linjer parallelle. Da de begge går gennem punktet $(7, 5)$ må de være sammenfaldende.

5. Linjen har parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

   Prikker man retningsvektoren for denne linje med normalvektoren for den anden får man 0. Dermed er linjerne parallelle. da $(-2, 0)$ ligger på den ene linje men ikke den anden er de ikke sammenfaldende.

6. Prikker man retningsvektoren for denne linje med normalvektoren for den anden får man 31. Dermed er de to linjer ikke parallelle og de må have præcist et skæringspunkt. Indsætter vi koordinaterne fra parameterfremstillingen i linjens ligning får vi ligningen

$$3(7t-6) + 2(5t-2) = 9.$$

   Løsningen er $t = 1$ hvilket giver et skæringspunkt på $(1, 3)$.

7. Svarene er:

   (a) $\vec{w}_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}.$

(b) $\vec{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(c) $\vec{w}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

EKSTRAOPGAVER:

8. Først bestemmer vi cirklernes skæringspunkter. Ved at gange ud har de to ligninger formen

$$x^2 + 1 - 2x + y^2 + 1 - 2y = 1, \qquad x^2 + 1 + 2x + y^2 + 1 + 2y = 5.$$

Trækker vi den første ligning fra den anden får vi

$$4x + 4y = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x + y = 1.$$

Lægger vi de to cirklers ligninger sammen får vi

$$2x^2 + 4 + 2y^2 = 6 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 1.$$

Indsætter vi $x = 1 - y$ i denne ligning får vi

$$2y^2 - 2y = 0$$

hvilket giver at $y = 0$ og $y = 1$. Når $y = 0$ skal $x = 1$ og når $y = 1$ skal $x = 0$. Dermed har vi fundet skæringspunkterne $(0,1)$ og $(1,0)$. Parameterfremstillingen bliver så

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

9. De to linjer har retningsvektorer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 + \sqrt{3} \end{bmatrix}.$$

Formlen for vinklen mellem vektorer giver at

$$\cos(\theta) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{||\vec{u}||||\vec{v}||} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{1 + (2 + \sqrt{3})^2}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}\sqrt{8 + 4\sqrt{3}}} = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{4 + 2\sqrt{3}}} = \frac{1}{2}.$$

Dermed ser vi at $\theta = \frac{\pi}{3}$.

10. Svarene er:

(a) Da trekanten er retvinklet følger det fra klassiske trigonometriske formler at

$$\cos(\theta) = \frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

(b) Vi har at $\cos(\theta) = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$ hvilket kombineret med forrige formel giver at

$$\frac{\|\vec{w}\|}{\|\vec{u}\|} = \cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}.$$

Ganger vi denne ligning igennem med $\|\vec{u}\|$ får vi at

$$\|\vec{w}\| = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}. \tag{2}$$

(c) Da $\vec{v}$ og $\vec{w}$ har samme retning gælder at

$$\frac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}.$$

Isolerer vi $\vec{w}$ i denne ligning får vi

$$\vec{w} = \|\vec{w}\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

og bruger vi udtrykket for $\|\vec{w}\|$ i (2) får vi at

$$\vec{w} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{v}\|^2}\vec{v}.$$