Facit til kursusgang 20: Repetition af B-niveau

1. Svarene er:

$$-\frac{1}{12}, \qquad \frac{1}{2}, \qquad \frac{11}{6}.$$

2. Svarene er:

$$x = 25, \qquad x = 2, x = -\frac{1}{2}, \qquad x = 1, x = -3, \qquad x = \pm 2, x = \pm\sqrt{2}.$$

3. Svarene er:

$$\frac{x-2}{x+3}, \qquad -\frac{x+3}{x+1}.$$

4. Svarene er:

$$27x^6, \qquad y^-1, \qquad \sqrt{x}.$$

5. Svarene er:

$$x = 2, y = \frac{-1}{2}.$$

6. g er surjektiv men ikke injektiv og f er hverken injektiv eller surjektiv.
7. Svarene $h(g(-1)) = -1$ og $g(f(3)) = 2$.
8. Svarene er

$$f(g(x)) = \frac{1}{1+\cos^4(x)}, \qquad g(f(x)) = \cos^2(\frac{1}{1+x^2}).$$

9. Svarene er:

$$6, \qquad 27, \qquad e^{\frac{1}{\ln(e^{-3})}} = e^{-\frac{1}{3}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{e}}.$$

10. Svarene er:

$$x = 1, \qquad x = \frac{1}{2}.$$

11. Svarene er:

$$\frac{3}{2}, \qquad 3.$$

12. Funkionen f er kontinert på mængden $\mathbf{R} \setminus 0, 1, 2$, altså i alle punkter undtagen 1,2 og 3.
13. Svaret er: $\lim_{x \to 2} xe^{x^2-4} - x = 0$.

14. Svarene er:

$$f'(x) = 4x + \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}, \qquad g'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \sin(x), \qquad h'(x) = \frac{3}{2x} + 4xe^{2x^2}.$$

15. Svarene er:

$$f'(x) = 2x(1 + \tan^2(x^2)), \quad g(x) = e^{2\sin(x)}(\sin(2x) + \cos(x)), \quad h(x) = -\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}.$$

16. (a) Den første blå og den første røde hører sammen.
    (b) Den anden blå og den tredje røde hører sammen.
    (c) Den tredje blå og den anden røde hører sammen.

17. Svaret er: $(f \circ g)'(3) = \frac{1}{4} - \frac{\pi}{6}$.

18. Det ses let at $f'(x) = 2x - 4$ så $f'(x) = 0$ har løsningen $x = 2$. Vælger vi punkterne $x_1 = 0$ og $x_2 = 3$ ser vi at $f'(x_1) = -4$ og at $f(x_2) = 2$. Dette giver monotonilinjen som ses i Tabel 1. Vi ser dermed at f er aftagende i intervallet $]-\infty, 2]$ og voksende i intervallet $[2, \infty[$. Tangenten gennem punktet $(1, f(1))$ har forskriften

$$y = -2(x - 1) + 1 = -2x + 3.$$

x	0	2	3
$f'(x)$	-4	0	2
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Tabel 1: Opgave 18.

19. Ved at undersøge kritiske punkter og interval endepunkter ses det at maksimumsværdien antages i $x = 1$ samt at $f(1) = 9$. Yderligere ses det at minimumsværdien tages i $x = -\frac{1}{3}$ samt at $f(-\frac{1}{3}) = \frac{11}{3}$.