

26. Kursusgang: Bestemte integraler 2

Vi har tidligere betragtet delvis integration og integration ved substitution for ubestemte integraler. Vi vil nu indføre disse teknikker for bestemte integraler.

Regneregel: Hvis f er en differentiabel funktion, og g er en kontinuert funktion, så er det bestemte integral af deres produkt i intervallet $[a, b]$ givet ved

$$1. \int_a^b f(x)g(x) dx = [f(x)G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x)G(x) dx.$$

Husk, at det ofte er en fordel, hvis du tænker dig lidt om, før du vælger, hvilken funktion du tager som f , og hvilken du tager som g .

Eksempler:

1. Bestem integralet af funktionen $h(x) = x \sin(x)$ i intervallet $[0, \frac{\pi}{2}]$:

Hvis vi vælger $f(x) = x$ og $g(x) = \sin(x)$, så har vi at $f'(x) = 1$ og $G(x) = -\cos(x)$.
Indsætter vi dette i regneregel 1. fås

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx &= [x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1(-\cos x) dx \\ &= [x(-\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \\ &= [-x \cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} + [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} - (-0 \cdot \cos 0) + \sin \frac{\pi}{2} - \sin 0 \\ &= -\frac{\pi}{2} \cdot 0 - 0 + 1 - 0 \\ &= 1. \end{aligned}$$

Integration ved substitution: Integration ved substitution for bestemte integraler minder meget om integration ved substitution for ubestemte integraler. Den eneste forskel er, at når vi substituerer den indre funktion, skal vi huske at ændre grænserne tilsvarende.

Hvis vi har en funktion h , som er givet som et produkt af to funktioner på formen

$$h(x) = f(g(x))g'(x),$$

så er det bestemte integral i intervallet $[a, b]$ af h givet ved

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx. \quad (1)$$

Hvis vi nu substituerer $u = g(x)$ og differentierer i forhold til x , fås

$$\frac{du}{dx} = g'(x) \Leftrightarrow \frac{1}{g'(x)} du = dx.$$

Vi indsætter nu dette i (1), hvilket giver

$$\int_a^b h(x) dx = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)g'(x)\frac{1}{g'(x)} du = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du.$$

Bemærk, at når vi substituerer er vi nødt til at ændre vores grænser. Vi kan nu integrere f i forhold til u uden at substituere tilbage igen

$$\int_a^b h(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u) du = [F(u)]_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)).$$

En anden måde at bestemme det bestemte integral af h er ved først at finde stamfunktionen til h og dernæst bruge at

$$\int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a).$$

Vi finder nu stamfunktionen til h ved substitution

$$\begin{aligned} H(x) &= \int h(x) dx \\ &= \int f(g(x))g'(x) dx \\ &= \int f(u)g'(x)\frac{1}{g'(x)} du \\ &= \int f(u) du \\ &= F(u) + c \\ &= F(g(x)) + c. \end{aligned}$$

Dermed har vi, at det bestemte integral af h i intervallet $[a, b]$ er givet ved

$$\int_a^b h(x) dx = H(b) - H(a) = F(g(b)) - F(g(a)).$$

Eksempler:

1. Udregn det bestemte integral i intervallet $x \in [0, 2]$ af funktionen $h(x) = 5x^4e^{x^5}$:

Vi udregner det bestemte integral

$$\int_0^2 h(x) dx = \int_0^2 5x^4e^{x^5} dx, \quad (2)$$

ved at bruge de to ovenstående metoder. Vi lader $f(u) = e^u$ og $u = g(x) = x^5$, så har vi at $h(x) = f(g(x))g'(x)$.

Hvis vi nu sætter $u = g(x) = x^5$ og differentierer i forhold til x , får vi

$$\frac{du}{dx} = 5x^4 \Leftrightarrow \frac{1}{5x^4} du = dx.$$

Vi indsætter nu dette i (2), hvilket giver

$$\int_0^2 h(x) dx = \int_0^2 5x^4 e^{x^5} dx = \int_{g(0)}^{g(2)} 5x^4 e^u \frac{1}{5x^4} du = \int_{0^5}^{2^5} e^u du = \int_0^{32} e^u du.$$

Ved at integrere fås

$$\int_0^2 h(x) dx = \int_0^{32} e^u du = [e^u]_0^{32} = e^{32} - 1.$$

I den anden metode, finder vi først stamfunktionen til h

$$H(x) = \int h(x) dx = \int 5x^4 e^{x^5} dx = \int 5x^4 e^u \frac{1}{5x^4} du = \int e^u du = e^u = e^{x^5},$$

og dernæst finder vi det bestemte integral ud fra

$$\int_0^2 h(x) dx = H(b) - H(a) = e^{2^5} - e^{0^5} = e^{32} - 1.$$