Facit til kursusgang 13: Differentialregning 1

1. Svarene er:

$$f'(x) = -4x, \qquad f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}, \qquad f'(x) = -3e^{-3x}.$$

2. Bestem $f'(-1)$ for funktionerne

$$f'(-1) = 4, \qquad f(x) = -5, \qquad f(x) = \frac{\ln(2)}{2}.$$

3. Svarene er:

$$f'(x) = 3x^2, \quad f'(x) = 1, \quad f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}, \quad f'(x) = -x^{-2}, \quad f'(x) = 12x^5.$$

4. Svarene er:

$$f'(x) = 6e^{2x} - \frac{1}{2x}, \qquad f'(x) = \frac{1}{2}\cos x, \qquad f'(x) = \frac{2}{x} - 6e^{-2x}.$$

5. Svarene er:

$$f'(x) = 21x^6 + 8x^3 - 6x, \quad f(x) = 10x^4 + \frac{9}{2}x^{\frac{1}{2}} + 4x^{-3}, \quad f(x) = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - x^{-2}.$$

6. Svaret er $f'(1) = 10$.

7. Svarene er:

   (a) Den første blå og den anden røde hører sammen.

   (b) Den anden blå og den tredje røde hører sammen.

   (c) Den tredje blå og den første røde hører sammen.

8. Svarene er:

$$f'(x) = x^{-\frac{2}{3}}, \qquad f'(x) = 6x^2 - 2x, \qquad f'(x) = 40x^3 + 228x^2 + 64x - 76.$$

9. Svarene er:

$$x = 1, \qquad x = 0, x = 4.$$

10. Vi har $(f+g)'(x) = 3x^2 - 2x$ og $(f-g)'(x) = -3x^2 + 10x - 6$.

11. Svarene er:

$$f'(x) = \frac{-1}{2}x^{-\frac{3}{2}} - x^{-2}, \qquad f'(x) = \frac{15}{4}x^{\frac{11}{4}}, \qquad f'(x) = -\frac{2}{x}.$$

12. Svarene er:

   (a) Den første blå og den tredje røde hører sammen.

(b) Den anden blå og den første røde hører sammen.

(c) Den tredje blå og den anden røde hører sammen.

13. Svarene er:

$$f'(x) = \frac{3}{x}, \qquad\qquad f'(x) = 3e^{3x}.$$

14. Svarene kan være:

(a) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{k-k}{h} = 0.$$

(b) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1.$$

(c) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{k(x+h)-kx}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{kh}{h} = k.$$

EKSTRAOPGAVER:

15. Svarene er:

(a) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x^2}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2xh}{h} = \lim_{h\to 0}(h+2x) = 2x.$$

(b) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

$$\lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{-h}{x(x+h)}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}.$$

(c) Vi indsætter f i differentialkvotienten og reducerer indtil det er let at tage grænsen $h \to 0$.

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{(\sqrt{x+h}-\sqrt{x})(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.\end{aligned}$$

16. Svarene er:

(a) $x = p \cdot \pi$ hvor p er et heltal.

(b) Vi har at

$$f(p\cdot\pi) = p\cdot\pi + 2\cos(p\cdot\pi) = p\cdot\pi - (-1)^k \cdot 2,$$

hvilket viser, at når p er lige ligger $(x, f(x))$ på linjen $y = x - 2$ og når p er ulige ligger punktet på $y = x + 2$.

17. Svarene er:

(a) Da en tangent til en cirkel står vinkelret på radius vil den stiplede linje tegnet i forlængelse af radius på figur **??** dele θ i en del på $\frac{\pi}{2}$ og en som er præcis ϕ. Dermed er $\theta = \frac{\pi}{2} + \phi$.

(b) Hvis vi isolerer for ϕ får vi at

$$\phi = \frac{s}{r},$$

og dermed bliver

$$\theta = \frac{\pi}{2} + \frac{s}{r}.$$

(c) Differentierer vi θ i forhold til s i formlen ovenfor følger det det direkte at

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{r}.$$