11. Kursusgang: Funktioner 5 (trigonometriske funktioner)

Vi er nu kommet til at studere trigonometriske funktioner som sinus, cosinus og tangens. For at gøre dette vil vi starte med at betragte vinkler. Vinkler måles i enten radianer eller grader. I dette kursus vil vi oftest benytte radianer, som er et mål for hvor langt, der gås på enhedscirklen. Vi har følgende sammenhæng mellem grader og radianer

$$\theta = \frac{s \cdot 180°}{\pi} \Leftrightarrow s = \frac{\theta \cdot \pi}{180°}$$

hvor θ er vinklen i grader og s er buelængden på enhedscirklen.

Eksempler:

1. Omskriv $s = 2$ radianer til grader:

   Vi har

   $$\theta = \frac{2 \cdot 180^{\circ}}{\pi} = \frac{360°}{\pi}$$

2. Omskriv $\theta = 280°$ til radianer:

   Vi har

   $$s = \frac{280° \cdot \pi}{180°} = \frac{14}{9}\pi$$

For at kunne definere de trigonometriske funktioner vil vi betragte enhedscirklen (se Figur 1), som er en cirkel med radius 1 og centrum i origo, som er punktet $(0,0)$.

Hvis vi starter i punktet $(1,0)$ på enhedscirklen og bevæger os med en vinkel θ mod uret (se Figur 1) så når vi til et punkt på enhedscirklen som vi kalder P. Hvis P har koordinaterne (x,y), så definerer vi $\cos(\theta) = x$ og $\sin(\theta) = y$. Hvis vi går imod urets retning i enhedscirklen, vil vi kalde det for den positive omløbsretning, og hvis vi går i urets retning, vil vi kalde det for den negative omløbsretning.

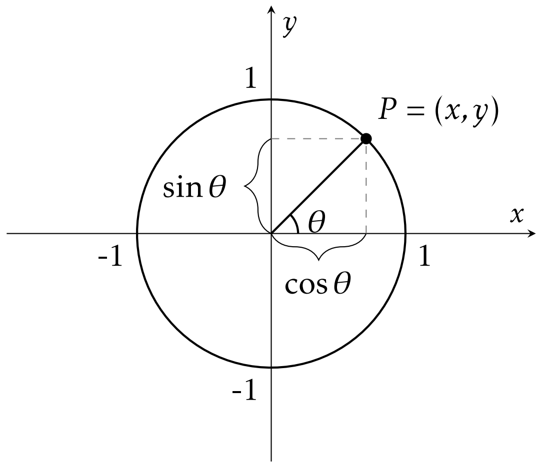
Bemærk, at enhedscirklen er 2π-periodisk. Det betyder, at hvis vi går en vinkel på θ mod uret og får et punkt P, så vil vi få det samme punkt hvis vi går vinklen $\theta + 2\pi$, da buelængden på enhedscirklen er 2π. Det medfører også at sinus og cosinus er 2π-periodiske funktioner, hvilket betyder at

$$\sin(\theta) = \sin(\theta + 2\pi k) \qquad \text{og} \qquad \cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi k),$$

hvor k er et heltal.

Hvis vi betragter Figur 2 ser vi, at hvis vi spejler et punkt (x,y), på enhedscirklen, omkring x-aksen får vi punktet $(x,-y)$ på enhedscirklen. Da det at spejle et punkt omkring x-aksen er det samme som at gå vinklen i den negative omløbsretning, fås at

$$\sin(-\theta) = -\sin(\theta) \qquad \text{og} \qquad \cos(-\theta) = \cos(\theta).$$



Figur 1: Sinus og cosinus i enhedscirklen.

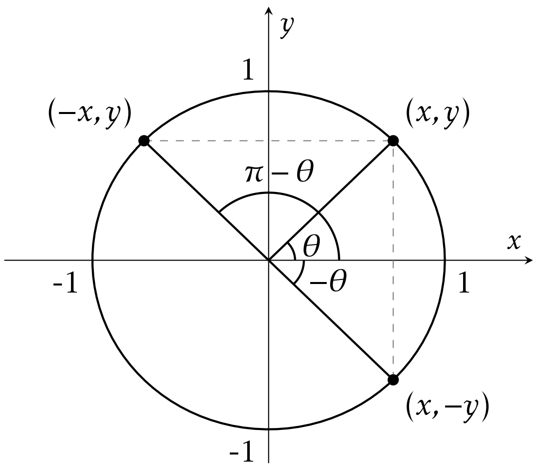
På tilsvarende vis ses, at hvis vi spejler punktet (x,y) i y-aksen, fås punktet $(-x,y)$. Da det at spejle i y-aksen, er det samme som at gå vinklen $\pi-\theta$ i positiv omløbsretning fås, at

$$\sin(\pi-\theta)=\sin(\theta) \qquad \text{og} \qquad \cos(\pi-\theta)=-\cos(\theta).$$

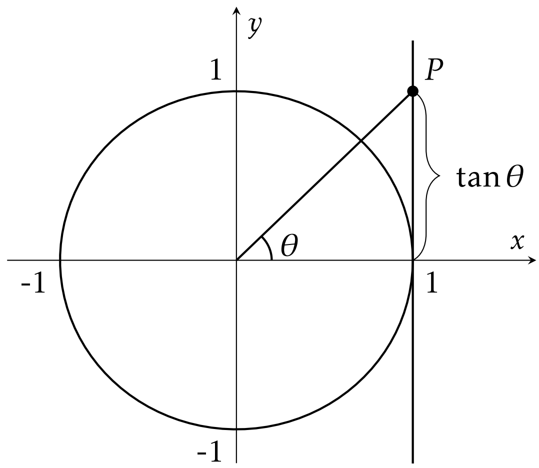
Vi definerer nu tangens ud fra sinus og cosinus, ved

$$\tan\theta=\frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)},$$

når $\theta \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, hvor k er et heltal. Tangens kan også bestemmes ud fra enhedscirklen (se Figur 3). Vi tegner en tangentlinje der skærer cirklen i punktet $(1,0)$. Hvis vi går en vinkel θ i enhedscirklen og så forlænger linjen indtil den skærer vores tangent, så er $\tan(\theta)$ præcis y-koordinaten i skæringspunktet P.



Figur 2: Symmetrien i enhedscirklen.



Figur 3: Tangens i enhedscirklen.

Trigonometriske identiteter Vi opsummerer her en liste over de trigonometriske identiteter, vi har vist plus nogle flere som vil være brugbare i opgaveregningen:

1. $\cos(\theta + 2\pi k) = \cos(\theta)$, når k er et heltal.
2. $\sin(\theta + 2\pi k) = \sin(\theta)$, når k er et heltal.
3. $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$.
4. $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$.
5. $\sin(\pi \pm \theta) = \mp \sin(\theta)$.
6. $\cos(\pi \pm \theta) = -\cos(\theta)$.
7. $\tan(\pi \pm \theta) = \pm \tan(\theta)$.
8. $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ (Grundrelationen).
9. $\sin(\theta \pm \phi) = \sin(\theta)\cos(\phi) \pm \cos(\theta)\sin(\phi)$ (Sumformlen for sinus).
10. $\cos(\theta \pm \phi) = \cos(\theta)\cos(\phi) \mp \sin(\theta)\sin(\phi)$ (Sumformlen for cosinus).
11. $\cos(2\theta) = \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 1 - 2\sin^2(\theta)$.
12. $\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$.

Derudover giver vi en liste over værdierne for nogle udvalgte vinkler. Vi betragter her kun vinkler i første kvadrant, da vi kan finde værdier for de andre kvadranter ved at benytte de ovenstående formler.

θ	$\sin\theta$	$\cos\theta$	$\tan\theta$
0	0	1	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	

Tabel 1: Værdier for udvalgte vinkler

Eksempler:

1. Beregn værdien $\cos(\frac{3\pi}{2})$:

   Ved at bruge den trigonometriske identitet nummer 6. får vi at

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = -0 = 0.$$

2. Beregn $\sin(9\pi)$:

   Ved at bruge den trigonometriske identitet nummer 2. fås at

$$\sin(9\pi) = \sin(\pi + 8\pi) = \sin(\pi + 2 \cdot 4 \cdot \pi) = \sin(\pi) = 0.$$

3. Vis at den trigonometriske identitet nummer 5. gælder for plus, ved at bruge sumformlen for sinus:

   Vi sætter $\phi = \pi$ i sumformlen for sinus og får

$$\sin(\theta + \pi) = \sin(\theta)\cos(\pi) + \cos(\theta)\sin(\pi).$$

   Vi ser på enhedscirklen, at $\cos(\pi) = -1$ og $\sin(\pi) = 0$. Indsætter vi det i den ovenstående ligning fås at

$$\sin(\theta + \pi) = \sin\theta \cdot (-1) + \cos(\theta) \cdot 0 = -\sin(\theta).$$