Facit til kursusgang 21: Vektorer i rummet 2

1. Parameterfremstillingen er:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 6 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

   Punktet P ligger ikke på linjen.

2. Ligningen for planen er

$$3(x-1) + 2(y+5) + 6(z-4) = 0.$$

3. Ved skiftevis at holde to af variablerne x, y, z lig 0 får vi skæringspunkterne $(0,0,12)$, $(0,-6,0)$ og $(3,0,0)$.

4. Indsætter vi koordinaterne for linjen i planens ligning får vi

$$\begin{aligned} 0 &= 3(1+t) - 2(-2-2t) + (2+4t) - 20 \\ &= 3 + 3t + 4 + 4t + 2 + 4t - 20 = 11t - 11. \end{aligned}$$

   Denne ligning har løsningen $t = 1$ og dermed bliver skæringspunktet $(2,-4,6)$.

5. Afstanden er $\sqrt{30}$

6. (a) Da $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ er linjens retningsvektor og planen normalvektor ortogonale. Derfor må linjen og planen være parallele.

   (b) Da linjen og planen er parallele, er afstanden fra et et hvert punkt på linjen til planen den samme. Derfor bestemmes afstanden ved at udvælge et vilkårligt punkt på linjen, f.eks $(2,-1,1)$, og bestemme afstanden mellem dette punkt og planen α.
   Afstanden er 2.

7. Da $\vec{u} \times \vec{v} = 0$ udspænder vektorerne ikke en plan.

8. Hvis vi lægger de to ligninger sammen får vi at $3x = 3$ hvilket giver at $x = 1$. Ganger vi den første ligning igennem med 2 og trækker den fra den anden får vi ligningen

$$3y + 3z = 3.$$

   Isolerer vi for y får vi at $y = 1 - z$ og hvis vi skriver $t = z$ får vi parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

EKSTRAOPGAVER:

9. Svarene er
   (a) Vi har at
   $$\vec{v} \times \vec{v} = 4 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$$
   hvorfor planens ligning bliver
   $$x - 2y + 2z = 0.$$
   (b) Arealet er 12.
   (c) Krydsproduktet for normalvektorerne til P og Q er
   $$\begin{bmatrix} -10 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$
   og for at planerne kan være parallelle eller sammenfaldende skal dette krydsprodukt være $\vec{0}$.
   (d) Indsætter vi linjens koordinater i venstresiden af ligningen for P får vi
   $$\frac{2}{7} - 10t - 2(\frac{1}{7} + 2t) + 2(7t) = 0$$
   hvilket viser at linjen er indehold i P. Gør vi det samme for Q får vi
   $$2(\frac{2}{7} - 10t) + 3(\frac{1}{7} + 2t) + 2(7t) = 1.$$
   Altså ligger linjen både i P og Q.
10. Vi har at
   $$\vec{w} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 6 \\ 15 \\ 7 \end{bmatrix}.$$