Opgaver til kursusgang 7: Funktioner 1 (injektivitet, surjektivitet, sum, produkt)

1. To mængder er givet ved:

$$A = \{0, 2, 4, 6, 8\},$$
$$B = \{\text{Hund}, \text{Hest}, \text{Struds}, \text{Fugleedderkop}, \text{Laks}, \text{Mariehøne}\}$$

Bestem om følgende sammenhænge mellem A og B er funktioner. I bekræftende fald bestem også om de er injektive og/eller surjektive.

(a) Lad $f: B \to A$ være givet ved

$$f(x) = \text{antal ben } x \text{ har.}$$

(b) Lad $g: A \to B$ være givet ved

$$g(0) = \text{Hund}, \quad g(2) = \text{Struds}, \quad g(4) = \text{Laks},$$
$$g(6) = \text{Fugleedderkop}, \quad g(8) = \text{Hest}$$

(c) Lad $h: A \to B$ være givet ved at

$$h(x) = \text{Dyrene i } B \text{ som har } x \text{ ben.}$$

2. Kan cirklen med ligning $x^2 + (y-1)^2 = 1$ beskrives som grafen af en funktion? Begrund svaret.

3. Lad $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ og $B = \{3, 5, \pi, 1, -1\}$. Bestem en funktion $f: A \to B$ således at

(a) f er injektiv og surjektiv.

(b) f er hverken injektiv eller surjektiv.

4. Figur 1 viser forskellige kurver i planen. Argumenter for hvilke kurver der beskriver grafen for en funktion.

5. I Figur 2 ses graferne for forskellige funktioner med definitionsmængde $[-2, 2]$ og codomæne $[-2, 2]$. Bestem for hver funktion om den er injektiv, surjektiv og/eller bijektiv.

6. Bestem en mængde $D \subset \mathbf{R}$ således at funktionen $f: D \to \mathbf{R}$ givet ved $f(x) = x^2$ bliver injektiv.

7. Bestem den størst mulige definitionsmængde for funktionerne

$$f(x) = \sqrt{-x^2 + x + 2}, \qquad g(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}, \qquad h(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2}}.$$

8. Bestem værdimængden for funktionen $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet ved $f(x) = -3x^2 + 9$.

9. To funktioner er givet ved: $f(x) = x^2 - 1$ og $g(x) = \frac{1}{1+x}$. Bestem

(a) $(f + g)(2)$

(b) $\left(\frac{f}{g}\right)(-2)$

(c) $(fg)(0)$

(d) $\left(\frac{g}{f}\right)(x)$

(e) $(g-f)(x)$.

EKSTRAOPGAVER:

10. På Figur 3 ses grafen for funktionen $f(x) = x^{-1}$. Brug grafen til at afgøre om f er injektiv, surjektiv og/eller bijektiv på $\mathbf{R}$. Hvis ikke f er bijektiv bestem så det størst mulige domæne og codomæne således at f bliver bijektiv.

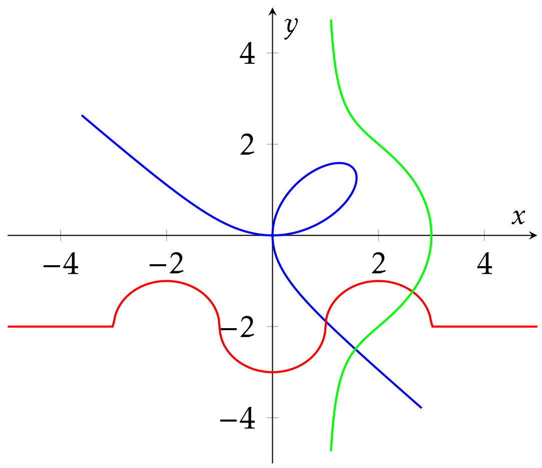
11. Skitser grafen for en funktion som opfylder alle nedenstående punkter:

    (a) har domæne $[-2,4[$, og codomæne $[-2,4]$,

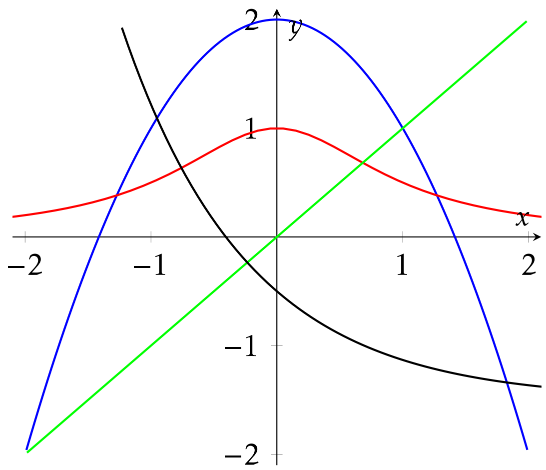
    (b) går gennem punkterne $(-1,3)$ og $(2,-2)$,

    (c) skærer y-aksen i -2,

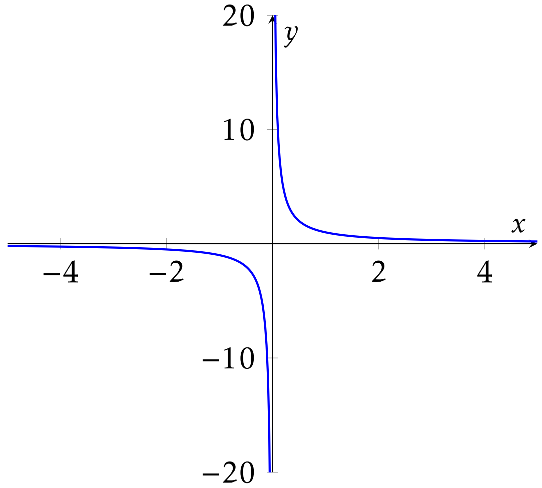
    (d) ikke skærer x-aksen.



Figur 1: Opgave 4.



Figur 2: Opgave 5.



Figur 3: Opgave 10.