Opgaver til kursusgang 8: Funktioner 2 (sammensat og invers)

1. Det oplyses at $f(1) = 2$, $f(4) = 1$, $g(1) = 1$ og $g(2) = 4$ for to funktioner f og g. Bestem

   (a) $f(g(2))$

   (b) $g(f(1))$

   (c) $g(f(f(4)))$

2. Bestem $(f \circ g)(x)$ og $(g \circ f)(x)$ hvor $f(x) = 3x$ og $g(x) = 4x^2 + 2x - 1$.

3. Om funktionen f oplyses at $f(1) = 8$, $f(2) = 4$, $f(3) = 5$.
   Bestem $f^{-1}(4)$, $f^{-1}(5)$ og $f^{-1}(8)$.

4. Bestem en forskrift for den inverse funktion til hver af de følgende funktioner

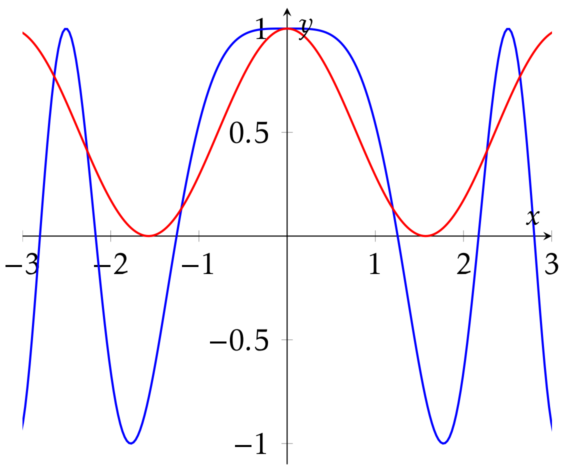
   (a) $f(x) = 2x - 8$

   (b) $g(x) = \ln(x + 3)$

   (c) $h(x) = \frac{1-2x}{x+4}$

5. Lad f, g være givet ved $f(x) = x^2$ og $g(x) = \frac{1}{1+x}$ hvor $x > 0$. Er $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

6. Lad $f(x) = x^2$ og $g(x) = \cos(x)$. På Figur 1 er graferne for $f \circ g$ of $g \circ f$ plottet. Bestem for hver graf den tilhørende funktionsforskrift.



Figur 1: Opgave 6

7. Lad f, g, h være funktioner defineret på $]0, \infty[$ givet ved

$$f(x) = \sqrt{x},$$
$$g(x) = \frac{1}{1+x},$$
$$h(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right)^2.$$

   Bestem forskriften for følgende funktioner:

(a) $f \circ g$,
(b) $g \circ f$,
(c) $h \circ g$,
(d) $g \circ g$.

8. Bestem den inverse funktion til $f\colon \mathbf{R} \setminus \{0\} \to \mathbf{R} \setminus \{0\}$ givet ved $f(x) = x^{-1}$. (Hint: Udregn $f(f(x))$.)

9. Vis at funktionerne $f\colon \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\} \to \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$ og $g\colon \mathbf{R} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \to \mathbf{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ givet ved

$$f(x) = \frac{x-1}{1-2x}, \qquad g(x) = \frac{x+1}{1+2x},$$

er inverse funktioner.

10. Lad $f(x) = \cos((x-2)^2)$

    (a) Bestem funktioner g, h så $f(x) = g(h(x))$.
    (b) Bestem to andre funktioner g_1, h_1 så $f(x) = g_1(h_1(x))$
    (c) Bestem tre funktioner f_1, f_2, f_3 så $f(x) = f_1(f_2(f_3(x)))$

11. Lad funktionen $f(x) = e^{x^2}$ og bestem funktioner g og h så $f(x) = (g \circ h)(x)$.

EKSTRAOPGAVER:

12. Lad $f\colon \mathbf{R} \to [-2, \infty[$ være givet ved $f(x) = (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ og lad $g\colon [-2, \infty[\to [0, \infty[$ være givet ved $g(x) = \sqrt{x+2}$.

    (a) Bestem definitionsmængde, værdimængde og funktionsforskrift for $f \circ g$
    (b) Er g og f inverse funktioner? (Hint: hvad er $(g \circ f)(-1)$?)
    (c) Bestem en passende definitionsmængde D så $f\colon D \to [-2, \infty[$ er invers til g.

13. Betragt funktionerne $f\colon [0, \infty[\to [0, \infty[$ og $g\colon [0, \infty[\to [1, \infty[$ givet ved $f(x) = x^{3/2}$ og $g(x) = x^{2/3} + 1$.

    (a) Bestem det størst mulige domæne D for funktionen $h\colon D \to \mathbf{R}$ givet ved $h(x) = x - 1$ så sammensætningen $f \circ h$ er defineret.
    (b) Vis at $g^{-1}(x) = (f \circ h)(x)$.