16. Kursusgang: Tangenter og monotoni

Vi vil nu se på nogle anvendelser af differentiation. Den første anvendelse er, hvordan man finder forskriften for den rette linje, der går gennem punktet $(x_0, f(x_0))$ på grafen for f og har hældningen $f'(x_0)$. Denne linje kaldes for tangenten til f i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Vi husker, at forskriften for den rette linje er givet ved

$$f(x) = ax + b, \tag{1}$$

hvor a er hældningen og b er skæringspunktet med y-aksen. Hermed fås at tangentens ligning er $y = ax + b$. Vi har, at $a = f'(x_0)$ i forskriften for tangentens ligning, da $f'(x_0)$ præcis beskriver hældningen. Det betyder at vi kun mangler at bestemme b, for at have en forskrift for tangentens ligning. Da vi ved, at tangenten går gennem punktet $(x_0, f(x_0))$ har vi, at

$$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0.$$

Hvis vi indsætter dette i (1), får vi at

$$y = f'(x_0)x + (f(x_0) - f'(x_0)x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Denne ligning kaldes for tangents ligning til f i punktet $(x_0, f(x_0))$.

Eksempler:

1. Find tangentens ligning til $f(x) = x^2 - 4x + 7$ i punktet $(1, 4)$:

   Vi ser ud fra punktet, at $x_0 = 1$ og $f(x_0) = 4$. For at finde $a = f'(x_0)$ finder vi først $f'(x)$, som er

   $$f'(x) = \frac{d}{dx}(x^2 - 4x + 7) = 2x - 4.$$

   Det medfører, at

   $$f'(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2.$$

   Til sidst finder vi b ved

   $$b = f(x_0) - f'(x_0)x_0 = 4 - (-2) \cdot 1 = 4 + 2 = 6,$$

   så tangentens ligning til f i punktet $(1, 4)$ er

   $$y = -2x + 6.$$

Monotoniforhold: Den næste anvendelse vi vil betragte er monotoniforhold. At finde monotoniforhold går ud på at finde ud af, i hvilke intervaller en given funktion er voksende og hvor den er aftagende. Vi siger, at

1. En funktion er voksende i et interval, hvis $f'(x) \geq 0$ for alle $x \in [a, b]$.
2. En funktion er aftagende i et interval, hvis $f'(x) \leq 0$ for alle $x \in [a, b]$.

Hvis vi har en funktion f, som er differentiabel og hvor f' er en kontinuert funktion, så gælder der, at f kun kan skifte fra at være voksende (aftagende) til at være aftagende (voksende) i et punkt x_0, hvor $f'(x_0) = 0$. Vi kalder sådanne punkter x_0 for kritiske punkter. Bemærk dog, at selvom f kan skifte fra at være voksende (aftagende) til at være aftagende (voksende) efter et kritisk punkt, så betyder det ikke at den nødvendigvis gør det. Hvis x_0 opfylder at $f'(x_0) = 0$, men f er voksende (aftagende) både før og efter x_0, så her haves en vandret vendetangent. Punktet $(x_0, f(x_0))$ kaldes for et vendetangentspunkt.

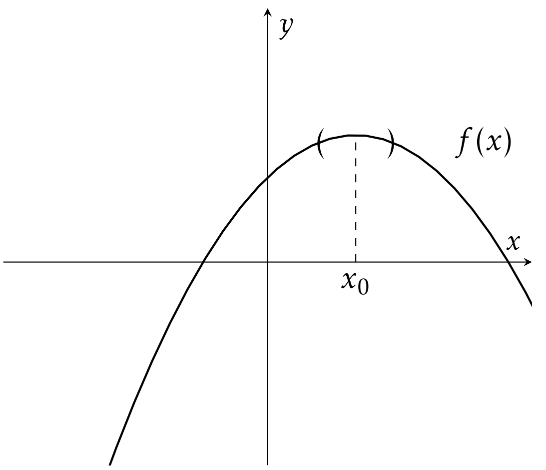
Hvis der findes et x_0, hvorom der gælder, at

$$f(x) \leq f(x_0),$$

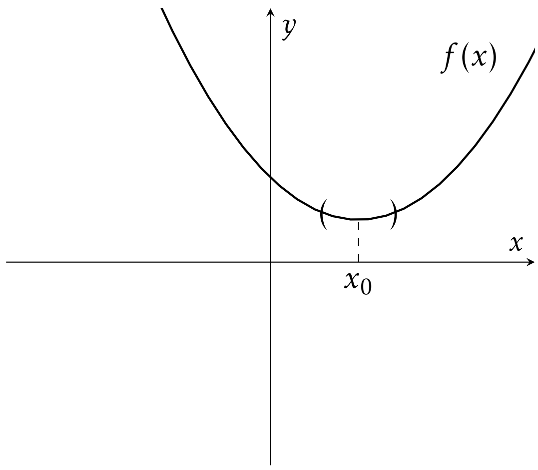
for alle x der både ligger i et lille interval omkring x_0 og i domænet for f, så haves der lokalt maksimum i $(x_0, f(x_0))$ (se Figur 1). På tilsvarende vis, siger vi at f har et lokalt minimum i $(x_0, f(x_0))$ hvis der gælder, at

$$f(x) \geq f(x_0),$$

for alle x der både ligger i et lille interval omkring x_0 og i domænet for f (se Figur 2).



Figur 1: Lokalt maksimum.



Figur 2: Lokalt minimum.

For at finde ud af i hvilke intervaller en funktion f er voksende og aftagende, finder vi først ud af i hvilke punkter $f'(x) = 0$. Dernæst finder vi ud af, hvilket fortegn $f'(x)$ har i punkter henholdsvis før, efter og imellem disse kritiske punkter, da f' kun kan skifte fortegn efter et kritisk punkt. Disse værdier indsættes i en monotonilinje (se Tabel 1). Hvis $f'(x)$ er negativ, så vil man i f's indgang i monotonilinjen lave en nedadgående pil, for at vise at f er aftagende og modsat, hvis $f'(x)$ er positiv, vil vi lave en opadgående pil (se det følgende eksempel).

x	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$f'(x)$					
$f(x)$					

Tabel 1: Monotonilinje.

Til sidst kan vi så ud fra monotonilinjen konkludere, i hvilke intervaller funktionen er aftagende og voksende.

Eksempler:

1. Bestem monotoniforhold for funktionen $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$:

   Vi finder først $f'(x)$ ved at differentiere

$$f'(x) = (-x^3 - 3x^2 + 2)' = -3x^2 - 6x.$$

   Dernæst løser vi $f'(x) = 0$ og ser at

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow -3x^2 - 6x = 0, \\ &\Leftrightarrow -3x(x+2) = 0. \end{aligned}$$

   Ved at benytte nulreglen får vi, at de kritiske punkter er $x = -2$ og $x = 0$. Dermed ser vores monotonilinje indtil videre ud som

x	x_1	-2	x_2	0	x_3
$f'(x)$		0		0	
$f(x)$					

Tabel 2: Monotonilinje for $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$.

   Vi vælger nu punkter x_1, x_2, x_3 hvor x_1 er mindre end -2, x_2 ligger mellem -2 og 0 og x_3 er større end 0, f.eks. $x_1 = -3$, $x_2 = -1$ og $x_3 = 1$. Vi indsætter nu disse punkter i forskriften for f' og får

$$\begin{aligned} f'(-3) &= -3 \cdot (-3)^2 - 6 \cdot (-3) = -27 + 18 = -9, \\ f'(-1) &= -3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) = -3 + 6 = 3, \\ f'(1) &= -3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 = -3 - 6 = -9. \end{aligned}$$

   Hvis vi indsætter disse oplysninger i vores monotonilinje, får vi

x	-3	-2	-1	0	1
$f'(x)$	-9	0	3	0	-9
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

Tabel 3: Monotonilinje for $f(x) = -x^3 - 3x^2 + 2$.

   Det giver at

   (a) f er aftagende i intervallet $x \in]-\infty, -2]$,

   (b) f er voksende i intervallet $x \in [-2, 0]$,

   (c) f er aftagende i intervallet $x \in [0, \infty[$,

   $f(-2) = -2$ og $f(0) = 2$ vi har derfor at der er et lokalt minimum i punktet$(-2; -2)$ og et lokalt maximum i punktet $(0; 2)$.