Opgaver til kursusgang 31 + 32: Repetition

1. Udregn følgende

$$\frac{2}{3}-\frac{3}{4}, \qquad \frac{\frac{4}{6}+\frac{1}{3}}{2}, \qquad \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{5}}\cdot\frac{2}{5}+\frac{1}{2}.$$

2. Løs ligningerne

$$\frac{x}{5}+2=7, \qquad 2x^2-3x=2, \qquad \frac{3}{x}=x+2, \qquad x^4-6x^2+8=0.$$

3. Reducer følgende

$$\frac{x^2+4-4x}{x^2+x-6}, \qquad \frac{9-x^2}{x^2-2x-3}.$$

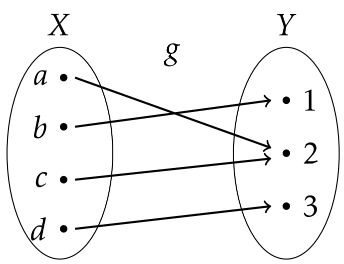
4. Udregn følgende

$$(3x^2)^3, \qquad \frac{x^2y}{(xy)^2}, \qquad \frac{x^2}{\sqrt{x}^3}.$$

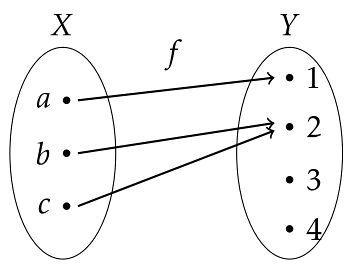
5. Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} 4y+3x &= 4 \\ 2y-x &= -3 \end{aligned}$$

6. Afgør om funktionerne f og g afbildet i Figur 1 og Figur 2 er surjektive, injektive og/eller bijektive.



Figur 1: g



Figur 2: f

7. Funktionerne f, g og h opfylder $f(3)=-1$, $g(-1)=2$ og $h(2)=-1$. Bestem $h(g(-1))$ og $g(f(3))$.

8. Lad $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ og $g(x)=\cos^2(x)$. Bestem $f(g(x))$ og $g(f(x))$.

9. Udregn følgende:

$$\ln((e^3)^2), \qquad 8^{\log_2(3)}, \qquad e^{\frac{1}{\ln(e^{-3})}}.$$

10. Løs ligningerne

$$e^{x^2+1} = e^{2x}, \qquad \ln(2x+1) + \ln(x) = 0$$

11. Udregn følgende:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right)\tan\left(\frac{2\pi}{3}\right), \qquad \frac{\sin(\frac{2\pi}{3}) - \cos(\frac{\pi}{4} - \frac{13\pi}{12})}{\tan(\frac{\pi}{6})}.$$

12. Bestem alle punkter hvor funktionen f givet ved

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{når } x < 0 \\ 1, & \text{når } 0 \leq x < 1 \\ 2, & \text{når } 1 \leq x < 2 \\ 3, & \text{ellers} \end{cases}$$

er kontinuert.

13. Bestem $\lim_{x \to 2} xe^{x^2-4} - x$.

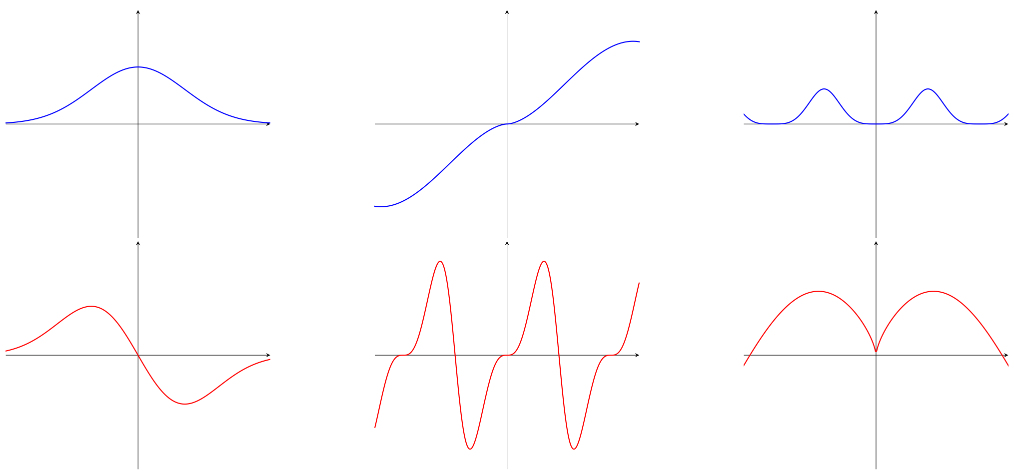
14. Differentier funktionerne

$$f(x) = 2x^2 - \frac{1}{\sqrt{x}}, \qquad g(x) = \sqrt[3]{x^2} - \cos(x), \qquad h(x) = \ln(x^{\frac{3}{2}}) + (e^{2x})^x.$$

15. Differentier funktionerne

$$f(x) = \tan(x^2), \qquad g(x) = e^{2\sin(x)}\sin(x), \qquad h(x) = xe^{-3\ln(\sqrt{x})}$$

16. Bestem for hver af de blå grafer i Figur 3 hvilken af de røde grafer der beskriver den afledede.



Figur 3: Opgave 16

17. Lad funktionen f være givet ved $f(x) = x^2 + \cos(x) - 4$ og lad g være en funktion som opfylder at $g(3) = \frac{\pi}{6}$ og at $g'(3) = -\frac{1}{2}$. Bestem $(f \circ g)'(3)$.

18. Bestem monotoniforholdene for funktionen $f(x) = x^2 + 4 - 4x$ og find tangentligningen gennem punktet $(1, f(1))$.

19. Bestem ekstremumsværdierne for $f(x) = 3x^2 + 2x + 4$ i intervallet $[-1, 1]$.

20. I GeoGebra er en ligesidet trekant med sidelængder 1 skitseret i et koordinatsystem. I trekanten er tegnet et indskrevet rektangel som er symmetrisk om linjen $x = \frac{1}{2}$. Bestem det størst mulige areal af rektanglet.

21. Er $F(x) = 12\sqrt{x} - 2x^2 + 1$ en stamfunktion til $f(x) = \frac{6}{\sqrt{x}} + 4x$?

22. Udregn følgende integraler

$$\int x^2 + 1\,dx, \qquad \int \frac{x}{\sqrt{x}} + \sin(x)\,dx, \qquad \int \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}\,dx.$$

23. Udregn følgende integraler

$$\int x\cos(x)\,dx, \qquad \int x^2\ln(x)\,dx.$$

24. Udregn følgende integraler

$$3\int (x^2+1)e^{x^3+3x-1}\,dx, \qquad \int x\ln(x^2)\,dx, \qquad \int \frac{4x^3+2x-1}{e^{x^4+x^2-x}}\,dx.$$

25. Udregn følgende bestemte integraler

$$2\int_0^1 x^2+1\,dx, \qquad \int_{-3}^3 x^3 - 3x\,dx, \qquad \int_{-1}^0 xe^x\,dx.$$

26. Udregn følgende bestemte integraler:

$$\int_{-1}^0 2xe^{x^2}\,dx, \qquad \int_0^{-\sqrt{\pi}} 5x\cos(x^2)\,dx.$$

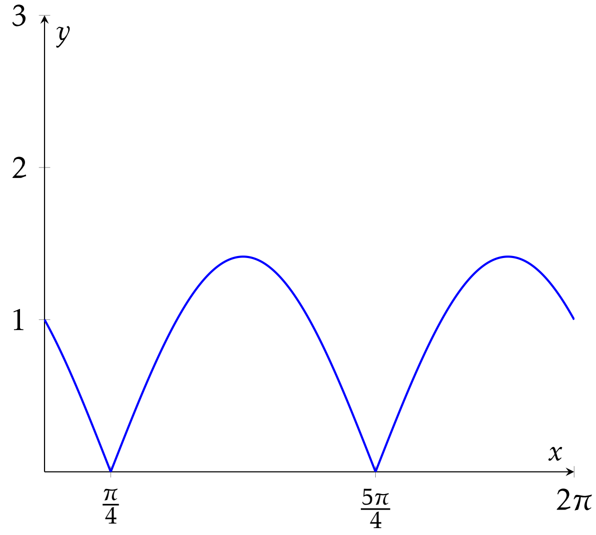
27. Lad $f : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \cos(x) - \sin(x), & \text{hvis } 0 \le x < \frac{\pi}{4} \\ \sin(x) - \cos(x), & \text{hvis } \frac{\pi}{4} \le 0 < \frac{5\pi}{4} \\ \cos(x) - \sin(x), & \text{hvis } \frac{5\pi}{4} \le x \le 2\pi. \end{cases}$$

Grafen for f er plottet i Figur 4. Bestem arealet mellem x-aksen og f i intervallet $[0, 2\pi]$.

28. Bestem en løsning til differentialligningen

$$y' + 3y = 0.$$



Figur 4: Opgave 27

29. Vis at $f(x) = e^{-e^x}$ er en løsning til differentialligningen

$$-\frac{y'}{y} = e^x$$

30. Hvilke af funktionerne

$$y_1(x) = \cos(3x), \qquad y_2(x) = 3\sin(3x), \qquad y_3(x) = 2e^{-3x}, \qquad y_4(x) = 3x^3$$

løser differentialligningen

$$-y'' = 9y?$$

31. Differentialligningen

$$y' - y = x$$

har en løsning som går gennem punktet $(-\ln(2), \ln(2))$. Bestem ligningen for tangenten til løsningen i dette punkt.

32. Vis at $y_1(x) = \cos x$ og $y_2(x) = \sin x$ er løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_2 \\ y_2' &= y_1, \end{aligned}$$

med begyndelsesværdibetingelserne $y_1(0) = 1$ og $y_2(0) = 0$.

33. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' + xy = x.$$

34. Bestem den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' - \sin(x)y = \sin(x).$$

35. Hvilke af funktionerne

$$y_1(x) = \frac{-1}{4}\cos(2x), \quad y_2(x) = \frac{1}{4}\sin(2x) \quad y_3(x) = \frac{-1}{2}\cos^2(x), \quad y_4(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)$$

løser differentialligningen

$$y' = \sin(x)\cos(x)?$$

36. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Udregn

$$-\vec{u}, \qquad 2\vec{v}, \qquad \vec{u}+\vec{v}, \qquad \vec{u}-3\vec{v}, \qquad \|\vec{u}\|, \qquad \|\vec{v}\|, \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}, \qquad \hat{\vec{u}}\cdot(3\vec{v}).$$

37. Bestem arealet af det parallelogram som udspændes af de to vektorer

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

38. Vis at vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}, \vec{v} = \begin{bmatrix} \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

er ortogonale og begge har norm 1.

39. Linjen l har ligning

$$3x + -2y = 1$$

og linjen m har parameterfremstilling

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

hvor $t \in \mathbf{R}$. Er l og m er parallelle?

40. Lad

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -3. \end{bmatrix}.$$

Udregn

$$-\vec{u}, \qquad -2\vec{v}, \qquad \vec{u}+\vec{v}, \qquad \vec{u}-\vec{v}, \qquad \|\vec{u}\|, \qquad \|\vec{v}\|, \qquad \vec{u}\cdot\vec{v}, \qquad \vec{u}\times\vec{v}.$$

41. Bestem arealet af parallelogrammet udspændt af vektorerne

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \text{og} \quad \vec{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2. \end{bmatrix}.$$

42. Bestem en parameterfremstilling for linjen m gennem punkterne $P_1 = (2, 3, -1)$ og $P_2 = (2, -2, 0)$. Ligger $P = (2, 8, -2)$ på m?

43. Bestem en ligning for planen der indeholder $P = (1, 1, 1)$ og har normalvektor

$$\vec{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Ligger $P_1 = (2, -1, \frac{-1}{3})$ i planen?